Risoluzione del compito n. 2 (Gennaio 2017/2)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{i}\bar z + w = 0 \\ z^2 + \sqrt{3}\, z + \bar w + 1 = 0\ ; . \end{cases}$$

Dalla prima equazione, $w = -\mathrm{i}\bar z$ e quindi $\bar w = \mathrm{i}z$, che sostituito nella seconda ci dà

$$z^2 + z(\sqrt{3}+\mathrm{i}) + 1 = 0\ ,$$

una equazione di secondo grado in z che risolviamo:

$$z = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}\pm\sqrt{3-1+2\mathrm{i}\sqrt{3}-4}}{2} = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}\pm\sqrt{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}}{2}\ .$$

A questo punto cerchiamo le radici di $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$, un numero che ha modulo 4 e che scriviamo

$$-2+2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\ .$$

Dunque ha argomento $2\pi/3$ e ha quindi radici di modulo 2 e argomento $\pi/3(+\pi)$. Allora le radici sono $\pm(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,)$ e

$$z = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}\pm\big(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,\big)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i} \\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}\ . \end{cases}$$

A questo punto troviamo i corrispondenti valori di $w=-\mathrm{i}\bar z$: dato che se $z=a+\mathrm{i}b$ allora $-\mathrm{i}\bar z = -b-\mathrm{i}a$ otteniamo le due soluzioni (z,w) del sistema:

$$z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}\ ,\quad w = \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$$

e

$$z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}\ ,\quad w = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $2x + |x| + \dfrac{2}{1+x^2}$.

a) **Studiate la funzione, specificando se e perché è continua, se e perché è derivabile, determinandone dominio, segno, asintoti e intervalli di monotonia e tracciandone il grafico.**

b) **Determinate per quali valori di $k > 0$ la funzione $f_k(x) = 2x + |x| + \dfrac{3k/2}{1+x^2}$ è monotona su tutto $\mathbb{R}$.**

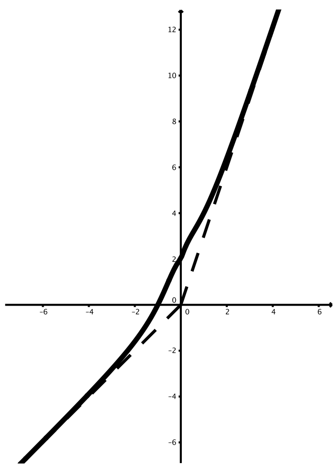
I tre addendi che compongono f sono funzioni continue definite su $\mathbb{R}$, quindi f è definita su $\mathbb{R}$ ed è continua; inoltre (a parte il valore assoluto in $x_0 = 0$) sono anche derivabili, quindi f è certamente derivabile in tutti i punti tranne zero, e vedremo poi se è o meno derivabile anche in zero. Dato che il terzo addendo tende a zero all'infinito abbiamo

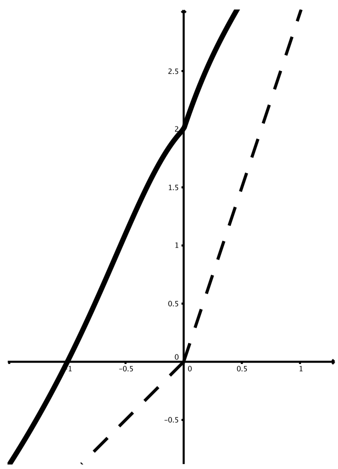
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x - x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x + x) = +\infty \ ,$$

e inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+x^2} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - 3x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+x^2} = 0$$

dunque f ha due asintoti obliqui, la retta di equazione $y = x$ a $-\infty$ e la retta di equazione $y = 3x$ a $+\infty$ (qui sotto, a destra un ingrandimento vicino a $x = 0$ per vedere l'angolo).





Per $x \geq 0$ è

$$f(x) = 3x + \frac{2}{1+x^2} > 0 \ ,$$

dunque f è positiva su $[0, +\infty[$. Invece per $x < 0$ abbiamo

$$f(x) > 0 \iff x + \frac{2}{1+x^2} > 0 \iff x^3 + x + 2 > 0 \ .$$

Una soluzione dell'equazione $x^3+x+2=0$ è $x=-1$, e dividendo per $x-(-1)=x+1$ abbiamo

$$x^3+x+2=(x+1)(x^2-x+2)\ ;$$

dato che x^2-x+2 è sempre positivo, abbiamo quindi che $f(x)<0$ per $x<-1$ e $f(x)>0$ per $x>-1$: il punto -1 è l'unico zero di f. Passiamo alla derivata: abbiamo per $x\neq 0$

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{se } x<0 \\ 3-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{se } x>0; \end{cases}$$

in particolare $f'(x)\to 1$ per $x\to 0^-$ e $f'(x)\to 3$ per $x\to 0^+$, ed essendo f continua per $x=0$ da un corollario del Teorema di de l'Hôpital ricaviamo

$$f'_-(0)=1\ , \qquad f'_+(0)=3$$

e in particolare f ha in zero un punto angoloso. Oserviamo che per $x<0$ la derivata è sempre positiva, dunque f cresce. Per $x>0$ osserviamo che da $(x-1)^2\geq 0$ segue $1+x^2\geq 2x$ e quindi

$$\frac{4x}{(1+x^2)^2}=2\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\leq 2\cdot 1\cdot 1=2<3\ ,$$

dunque f è strettamente crescente anche per $x\geq 0$ e in conclusione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Avremmo potuto anche procedere così, sempre per $x>0$:

$$f'(x)>0 \iff 3>\frac{4x}{(1+x^2)^2} \iff 3+6x^2+3x^4>4x\ .$$

Per $x\geq 1$ basterebbe a sinistra il solo termine $6x^2$, e per x piccolo basta 3; mostriamo che

$$3+6x^2>4x \qquad \forall x$$

(che si verifica immediatamente, è una disequazione di secondo grado) e allora $3+6x^2+x^4>3+6x^2>4x$.

La seconda parte è più delicata: abbiamo

$$f_k'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{3kx}{(1+x^2)^2} & \text{se } x<0 \\ 3-\dfrac{3kx}{(1+x^2)^2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

e permane che f è crescente per $x\leq 0$, quindi perché f sia monotona su tutto $\mathbb{R}$ occorre che

$$3-\frac{3kx}{(1+x^2)^2}\geq 0 \qquad \forall x>0\ .$$

Questa si può riscrivere in vari modi:

$$1 \geq \frac{kx}{(1+x^2)^2} \iff \frac{(1+x^2)^2}{x} \geq k \qquad \text{(A)}$$
$$\iff (1+x^2)^2 \geq kx \,. \qquad \text{(B)}$$

Partiamo dal modo (A): il numero k deve essere dunque minore o uguale di tutti i valori della funzione $g(x) = (1+x^2)^2/x$ per $x > 0$, quindi deve essere minore o uguale del minimo di g (che esiste dato che g è continua e tende a $+\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$), e lo cerchiamo:

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2x + x^3 \,, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 + 3x^2 = \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^2} \,.$$

Posto $x^2 = t$, e ricordiamoci che ci interesseranno solo valori non negativi di t, abbiamo

$$3t^2 + 2t - 1 > 0 \iff t > 1/3$$

e quindi per $x > 0$

$$g'(x) > 0 \iff 3x^4 + 2x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > 1/3 \iff x > 1/\sqrt{3} \,.$$

Dunque g ha minimo per $x = 1/\sqrt{3}$, tale minimo vale

$$\min g = g(1/\sqrt{3}\,) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

e quindi la funzione f_k è monotona su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $k \leq 16\sqrt{3}/9$.
Proviamo ora con la strada (B): vediamo quali fra le (semi)rette di equazione $y = kx$ non intersecano mai la curva di equazione $y = (1+x^2)^2$. È chiaro che il massimo coefficiente angolare k è quello della semiretta tangente, che ora cerchiamo. Se questa è tangente in un punto x_k, deve essere

$$(1 + x_k^2)^2 = kx_k$$

(la curva e la semiretta si toccano per $x = x_k$) e anche

$$2(1 + x_k^2) \cdot 2x_k = k$$

(si toccano con lo stesso coefficiente angolare). Sostituendo nella prima equazione il valore di k dato dalla seconda abbiamo

$$(1 + x_k^2)^2 = 4x_k^2(1 + x_k^2) \iff 1 + x_k^2 = 4x_k^2 \iff x_k = 1/\sqrt{3}$$

che risostituito nella seconda equazione ridà $k = 16/3\sqrt{3} = 16\sqrt{3}/9$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni

$$\boldsymbol{f(x) = \cos(x^3 + x^5) - \cos(x^2 + x^4) - \mathrm{sen}(1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2})}$$
$$\boldsymbol{g(x) = \cos(x^3 + x^5) - \cos(x^2 + x^4) + \mathrm{sen}(1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2}) \, .}$$

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $\boldsymbol{f}$, centrato in $\boldsymbol{x_0 = 0}$.**

b) **Determinate per quali $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ converge $\displaystyle\boldsymbol{\int_0^{1/2} \frac{1}{(f(x))^\alpha}\, dx}$.**

c) **Determinate per quali $\boldsymbol{\beta \in \mathbb{R}}$ la funzione $\boldsymbol{1/\big(g(x)\big)^\beta}$ ha integrale in senso generalizzato convergente vicino a $\boldsymbol{x_0 = 0}$.**

Iniziamo con lo sviluppo di Taylor:

$$\begin{aligned}
\cos(x^3 + x^5) &= 1 - \frac{1}{2}(x^3 + x^5)^2 + o(x^3 + x^5)^3 \\
&= 1 - \frac{x^6}{2} - x^8 + o(x^9) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6) \\
\cos(x^2 + x^4) &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x^4)^2 + o(x^2 + x^4)^3 = 1 - \frac{x^4}{2} - x^6 + o(x^6) \\
1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2} &= 1 + x^2 - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6) = -\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\
\mathrm{sen}(1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2}) &= -\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)
\end{aligned}$$

e pertanto

$$f(x) = \Big(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\Big) - \Big(1 - \frac{x^4}{2} - x^6 + o(x^6)\Big) - \Big(-\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\Big) = x^4 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6) \, .$$

Per quanto riguarda l'integrale, per far le cose per bene dovremmo assicurarci che il denominatore sia positivo in $]0, 1/2]$ e in particolare non si annulli altro che in zero: osserviamo che $f(0) = 0$ e che

$$f'(x) = (2x + 4x^3)\,\mathrm{sen}(x^2 + x^4) - (3x^2 + 5x^4)\,\mathrm{sen}(x^3 + x^5) + 2x(\mathrm{e}^{x^2} - 1)\cos(1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2}) \; :$$

per $0 < x \le 1/2$ abbiamo

$$[2x > 3x^2 > 0 \, , \quad 4x^3 > 5x^4 > 0] \quad \Rightarrow \quad (2x + 4x^3 > (3x^2 + 5x^4 > 0 \, ,$$

$$\pi/2 > x^2 + x^4 > x^3 + x^5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(x^2 + x^4) > \mathrm{sen}(x^3 + x^5) > 0$$

e quindi

$$(2x + 4x^3)\,\mathrm{sen}(x^2 + x^4) - (3x^2 + 5x^4)\,\mathrm{sen}(x^3 + x^5) > 0 \, .$$

Poi

$$0 > 1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2} > 1 - \mathrm{e}^{1/4} > 1 - 4^{1/4} = 1 - \sqrt{2} > -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \cos(1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2}) > 0 \,,$$

ma anche $2x(\mathrm{e}^{x^2} - 1) > 0$ dunque $f'(x) > 0$. In particolare f rimane positiva in $]0, 1/2]$ e il primo integrale è improprio solo in zero. Allora essendo $f(x) = x^4 + o(x^4)$ per il criterio del confronto asintotico il primo integrale converge se e solo se $4\alpha < 1$ ossia $\alpha < 1/4$.
Per il secondo integrale non dobbiamo preoccuparci troppo, dato che si tratta di studiarlo solo vicino a zero (ma come vedremo un minimo di preoccupazione ci vuole), e usando i calcoli già fatti abbiamo

$$g(x) = \Big(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\Big) - \Big(1 - \frac{x^4}{2} - x^6 + o(x^6)\Big) + \Big(-\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\Big) = \frac{x^6}{3} + o(x^6) \,.$$

In particolare $g(x)/x^6 \to 1/3 > 0$ per $x \to 0$, quindi g ha lo stesso segno di x^6 (ossia è positiva) per $0 < x \leq x_0$ abbastanza piccolo, e il secondo integrale è improprio solo in zero. Per il criterio del confronto asintotico, converge se e solo se $6\beta < 1$ ossia $\beta < 1/6$.

PROBLEMA 4

Sia per ogni $n \geq 2$

$$a_n = \log\Big(\frac{n}{n+1}\Big) - \log\Big(\frac{n-1}{n}\Big) .$$

a) **Calcolate** $\lim_{n\to+\infty} a_n$ **.**
b) **Studiate la monotonia di** $\{a_n\}_n$ **.**
c) **Determinate se** $\sum_n a_n$ **converge e, se sì, calcolate la somma della serie.**
d) **Determinate per quali valori di** $\alpha \in \mathbb{R}$ **converge la serie** $\sum_n n^\alpha a_n$ **.**

Entrambi gli argomenti dei logaritmi tendono a 1, dunque chiaramente $a_n \to 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} a_n &= \log\Big(\frac{n}{n+1}\Big) + \log\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \log\Big(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\Big) \\ &= \log\Big(\frac{n^2}{n^2-1}\Big) = \log\Big(1 + \frac{1}{n^2-1}\Big) . \end{aligned}$$

la funzione n^2 è crescente, quindi anche n^2-1 che inoltre è positiva. Allora $1/(n^2-1)$ è decrescente, quindi anche $1+1/(n^2-1)$, ma il logaritmo è crescente ed a_n, che è composizione di una funzione crescente ed una decrescente, è decrescente. Inoltre $n^2/(n^2-1) \to 1$ quindi $a_n \to 0$.
Dato che

$$a_n = \log\Big(1 + \frac{1}{n^2-1}\Big) = \frac{1}{n^2-1} + o(1/n^2) \sim \frac{1}{n^2} ,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_n a_n$ converge. Osserviamo che si tratta di una serie telescopica: ponendo per $n \geq 2$

$$b_n = \log\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

abbiamo $a_n = b_{n+1} - b_n$, dunque

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n}[b_{k+1} - b_k] = \sum_{k=3}^{n+1} b_k - \sum_{k=2}^{n} b_k = b_{n+1} - b_2 = \log\frac{n}{n+1} - \log\frac{1}{2}$$

che tende per $n \to +\infty$ a $-\log(1/2) = \log 2$, la somma della serie. Che sia una serie telescopica si può capire provando a calcolarsi le prime somme parziali:

$$a_3 + a_2 = \Big[\log\frac{3}{4} - \log\frac{2}{3}\Big] + \Big[\log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2}\Big] = \log\frac{3}{4} - \log\frac{1}{2}$$

e

$$a_4 + a_3 + a_2 = \log\frac{4}{5} - \log\frac{1}{2}$$

e a questo punto dovrebbe essere evidente.
Abbiamo già osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = 1 ,$$

quindi

$$\sum_n n^\alpha a_n \sim \sum_n n^{\alpha-2} = \sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

che converge se e solo se $2 - \alpha > 1$ ossia $\alpha < 1$.

Esercizio 1. Una soluzione dell'equazione $z^2 = \dfrac{8\mathrm{i}}{z}$ è

(A) $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

(B) $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

(C) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(D) Nessuna delle altre è corretta.

Ricordando che $z \neq 0$, l'equazione si riscrive $z^3 = 8\mathrm{i}$. Una delle radici cubiche di $8\mathrm{i}$ è $-2\mathrm{i}$ che ha modulo 2 e argomento $-\pi/2$, le altre due avranno argomento che differisce da questo per $2\pi/3$, dunque avranno argomento $\pi/6$ e $5\pi/6$. Le tre risposte fornite hanno modulo 2 , e $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ ha argomento $5\pi/6$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \operatorname{sen}(x)\log(1-x)$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $f'''(0) = -3,\ f^{iv}(0) = -4$.

(B) $f'''(0) = -3,\ f^{iv}(0) = 6$.

(C) $f'''(0) = -1/2,\ f^{iv}(0) = -1/6$.

(D) $f'''(0) = 2,\ f^{iv}(0) = -4$.

Abbiamo

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\ , \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

quindi nello sviluppo di Taylor del prodotto compaiono i termini

$$(\text{termini in } x^2\ ) - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\ .$$

Ma lo sviluppo di Taylor di una funzione f è composto dai termini $f^{(i)}(0)x^i/i!$, quindi

$$\frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{2}\ , \qquad \frac{f^{iv}(0)}{4!} = -\frac{1}{6}$$

e dunque $f'''(0) = -3,\ f^{iv}(0) = -4$.

Esercizio 3. Sia $S = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^4 - 8x^2 + 16) \leq 0\}$. Allora:

(A) $]-\sqrt{5}, -2[\subset S$.

(B) $[\sqrt{3}, \sqrt{5}] \subset S$.

(C) $\inf S = -\sqrt{3}$.

(D) $S \subset \mathbb{R}^+$.

Ricordando che l'argomento del logaritmo deve essere positivo, e che il logaritmo è negativo prima di 1 , la disequazione equivale a

$$0 < x^4 - 8x^2 + 16 \leq 1 \iff 0 < (x^2-4)^2 \leq 1\ .$$

Dunque $x^2 - 4$ deve essere compreso fra -1 e 1 ma diverso da zero, ossia

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ -1 \leq x^2 - 4 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \neq 4 \\ 3 \leq x^2 \leq 5 \end{cases}$$
$$\iff x \in [-\sqrt{5}, -2[\cup]-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}]\ .$$

Esercizio 4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} a\log(\mathrm{e}-x)+b\cos x & \text{se } x\le 0 \\ 2a|x+1|-2b\,\mathrm{e}^{3x}+1 & \text{se } x>0 \end{cases}$, per quali valori di $a,\, b\in\mathbb{R}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a=2\,\mathrm{e}\,,\ b=\dfrac{2\,\mathrm{e}+1}{3}$.	(C) $a=-2\,\mathrm{e}\,,\ b=\dfrac{1-2\,\mathrm{e}}{3}$.
(B) $a=\dfrac{6\,\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}+1}\,b$ per ogni $b\in\mathbb{R}$.	(D) $a=\dfrac{2\,\mathrm{e}}{4\,\mathrm{e}+3}\,,\ b=\dfrac{2\,\mathrm{e}+1}{4\,\mathrm{e}+3}$.

Osserviamo intanto che per $x>0$ è $|x+1|=x+1$, quindi non c'è alcun problema per $x\neq 0$; in zero abbiamo

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x) = a+b\,,\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2a-2b+1\,.$$

Se vogliamo che f sia derivabile, deve essere anche continua, quindi

$$a+b=2a-2b+1 \iff a+1=3b\,.$$

Poi per $x\neq 0$ abbiamo

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{\mathrm{e}-x}-b\,\mathrm{sen}\,x & \text{se } x<0 \\ 2a-6b\,\mathrm{e}^{3x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{a}{\mathrm{e}}\,,\qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=2a-6b\,.$$

Per un corollario del Teorema di de l'Hôpital, dato che questi limiti esistono, f sarà derivabile in zero se e solo se i limiti coincidono, quindi (ricordando la condizione per la continuità)

$$-\frac{a}{\mathrm{e}} = 2a-6b = 2a-2(a+1) = -2 \Rightarrow a=2\,\mathrm{e} \Rightarrow b=\frac{a+1}{3}=\frac{2\,\mathrm{e}+1}{3}\,.$$

Esercizio 5. Al mare, un gruppo di ragazzi organizza un lungo torneo di beach-tennis in cui ognuno gioca in coppia con un qualsiasi altro ragazzo contro una qualunque coppia formata dai giocatori rimanenti. (In altre parole, ogni coppia possibile gioca una partita contro ciascuna delle altre coppie possibili). Se i ragazzi in tutto sono **sette**, quante partite dura il torneo?

(A) 105.	(C) $7!$.
(B) $3\cdot 5!$.	(D) 35.

Le coppie che si possono formare sono $\binom{7}{2}=7\cdot 6/2=21$. Scelta una coppia, restano solo 5 ragazzi, quindi le altre coppie possibili sono $5\cdot 4/2=10$. La coppia A giocherà quindi 10 partite, lo stesso la coppia B e così via. Il prodotto $10 \cdot 21$ conta però due volte ogni partita (la coppia A gioca contro B e la coppia B gioca contro A), quindi il numero di partite è $10 \cdot 21/2 = 5 \cdot 21 = 105$.

Soluzione alternativa: per giocare una partita occorrono quattro ragazzi; allora per contare le partite prima contiamo i gruppi di quattro che possiamo scegliere (e sono $\binom{7}{4} = 35$), poi dato che i quattro ragazzi $ABCD$ giocano tre partite (a seconda se A è in coppia con B, C o D) moltiplichiamo per 3. Si può osservare che nel caso generale di n ragazzi le partite sono $\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2}/2 = 3 \cdot \binom{n}{4}$.

Esercizio 6. L'integrale $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \log \sqrt{x}\, dx$ vale

(A) $-\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4}\log 2$.	(C) $-\log \dfrac{1}{2}$.
(B) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log 2$.	(D) $\dfrac{3}{4}\log \dfrac{1}{2}$.

Una primitiva di $\log\sqrt{x}$ si può trovare sostituendo $\sqrt{x} = t$, oppure integrando per parti $1 \cdot \log\sqrt{x}$, o anche osservando che $\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$ e ricordando a memoria una primitiva del logaritmo. In ogni modo

$$\int_{1/4}^{1} \log\sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\Big[x\log x - x\Big]_{1/4}^{1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big) = -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\log 2\,.$$

Esercizio 7. La funzione $2x - \operatorname{sen} x$ è iniettiva

(A) su tutto $\mathbb{R}$.	(C) solo negli intervalli su cui il seno è decrescente.
(B) solo negli intervalli su cui il seno è crescente.	(D) su nessun intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

La funzione $2x - \operatorname{sen} x$ è continua, definita sull'intervallo $\mathbb{R}$ e ha derivata $2 - \cos x \geq 1 > 0$ dunque è strettamente crescente, quindi è iniettiva su $\mathbb{R}$.