Risoluzione del compito n. 1 (Gennaio 2017/1)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w) , con $z,w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{w^2 - 2\mathrm{i}wz + (\mathrm{i}z)^2 = 0} \\ \boldsymbol{4zw - 12\mathrm{i}\bar{w} = 9\mathrm{i}} \; . \end{cases}$$

La prima equazione è

$$(w - \mathrm{i}z)^2 = 0 \iff w = \mathrm{i}z \; .$$

A questo punto la seconda equazione diventa

$$4\mathrm{i}z^2 - 12\mathrm{i}(-\mathrm{i}\bar{z}) = 9\mathrm{i} \iff 4z^2 + 12\mathrm{i}\bar{z} = 9 \; ;$$

è possibile proseguire senza scrivere $z = x + \mathrm{i}y$, ma tanto vale farlo (le strade sono equivalenti) ottenendo

$$\begin{cases} 4x^2 - 4y^2 + 12y = 9 \\ 2xy + 3x = 0 \; . \end{cases}$$

Dall'ultima equazione, che si riscrive $x(2y+3) = 0$, otteniamo che o $x = 0$ o $y = -3/2$. Nel primo caso ($x = 0$) deve essere

$$-4y^2 + 12y = 9 \iff 4y^2 - 12y + 9 = 0 \; ,$$

un'equazione che ha solo la soluzione $y = 3/2$. Nel secondo caso invece deve essere

$$4x^2 - 9 - 18 = 9 \iff x^2 = 9$$

e otteniamo $x = \pm 3$. Allora i possibili valori di z sono tre, e ricavando i rispettivi valori di $w = \mathrm{i}z$ abbiamo le tre soluzioni del sistema:

$$z = 3\mathrm{i}/2 \; , \; w = -3/2 \qquad z = 3 - \frac{3}{2}\mathrm{i} \; , \; w = \frac{3}{2} + 3\mathrm{i} \qquad z = -3 - \frac{3}{2}\mathrm{i} \; , \; w = \frac{3}{2} - 3\mathrm{i} \; .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = (x-3)\,e^{-1/(2x)}$.

2a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, il segno, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, gli intervalli di convessità/concavità.**

2b) **Determinate l' immagine di f .**

2c) **Determinate i limiti di $f'(x)$ agli estremi del dominio.**

2d) **Disegnate il grafico di f .**

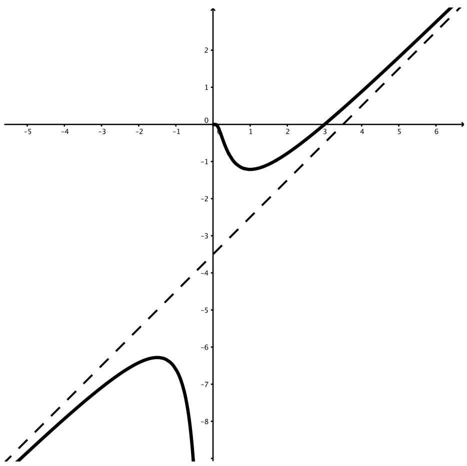
2e) **Motivando la risposta, determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $(x-3)\,e^{-1/(2x)} = x + k$.**

La funzione è definita per $x \neq 0$ quindi ha dominio $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Dato che $e^{-1/2x} \to 1$ per $x \to \pm\infty$ abbiamo subito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \,.$$

Invece per $x \to 0^-$ è $e^{-1/2x} \to +\infty$ e per $x \to 0^+$ è $e^{-1/2x} \to 0^+$, quindi essendo $x - 3 \to -3 < 0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \,, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 0^- \,.$$



Per il segno non c'è alcun problema, dato che l'esponenziale è sempre positivo (dove esiste), quindi f ha il segno di $x - 3$:

$$f(x) < 0 \iff x < 0 \ \textbf{o}\ 0 < x < 3 \,, \qquad f(x) > 0 \iff x > 3$$

e $f(3) = 0$. Abbiamo poi un asintoto verticale sinistro per $x \to 0^-$, e all' infinito abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x}\, e^{-1/2x} = 1$$

quindi gli eventuali asintoti obliqui hanno coefficiente angolare 1 . Essendo poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x\left(e^{-1/2x} - 1\right) - 3\,e^{-1/2x}\right] = -3 - \frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-1/2x} - 1}{-1/2x} = -\frac{7}{2}$$

la funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = x - 7/2$.
La derivata di f è

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-1/2x}\Big(1 + (x-3)\frac{1}{2x^2}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-1/2x}}{2x^2}(2x^2 + x - 3)$$

e dove esiste (cioè per $x \neq 0$) ha lo stesso segno di $2x^2 + x - 3$, pertanto si annulla per $x = -3/2$ e per $x = 1$, è positiva per $x < -3/2$ e per $x > 1$ ed è negativa sia per $-3/2 < x < 0$ che per $0 < x < 1$. Possiamo allora dire che f è crescente in $]-\infty, -3/2]$ e in $[1, +\infty[$, mentre è decrescente in $[-3/2, 0[$ e in $]0, 1]$. Abbiamo un massimo locale per $x = -3/2$ e un minimo locale per $x = 1$, che non sono naturalmente assoluti dato che f non è limitata né superiormente né inferiormente, e

$$f(-3/2) = -\frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{1/3}\,, \qquad f(1) = -2\,\mathrm{e}^{-1/2}\,.$$

Notiamo che $f(-3/2) < f(1)$, e osserviamo sin d'ora che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$$

mentre per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -3 \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-1/2x}}{2x^2} = -\frac{3}{2} \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^{t/2}} = 0^-$$

dato che l'esponenziale domina sulla potenza. Per la stretta monotonia di f abbiamo

$$f\big(]-\infty, -3/2]\big) =]-\infty, f(-3/2)]\,, \qquad f\big([-3/2, 0[\big) =]-\infty, f(-3/2)]$$

$$f\big(]0, 1]\big) = [f(1), 0[\,, \qquad f\big([1, +\infty\big) = [f(1), +\infty[$$

perciò l'immagine di f è

$$\frac{]-\infty, f(-3/2)] \cup [f(1), +\infty[= \Big]-\infty, -9\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{2\Big] \cup \Big[-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}, +\infty\Big[\,.}$$

La derivata seconda di f è

$$f''(x) = (13x - 3)\frac{\mathrm{e}^{-1/2x}}{4x^4}$$

perciò f è strettamente concava in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 3/13]$, ed è strettamente convessa in $[3/13, +\infty[$. In particolare f' è strettamente decrescente per $x < 0$, ed avendo limite 1 per $x \to -\infty$ è sempre minore di -1 in $]-\infty, 0[$. Analogamente per $x \geq 1$ abbiamo f convessa, quindi f' crescente ma $f' \to 1$ all'infinito, quindi $f' < 1$. Anche nel tratto

$]0,1]$ abbiamo $f' < 1$ dato che f è addirittura decrescente. In conclusione la funzione (definita per $x \neq 0$)

$$g(x) = f(x) - x$$

ha derivata sempre negativa, ed essendo (come in parte abbiamo già calcolato)

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = -\frac{7}{2}\ , \qquad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

la funzione g assume una e una sola volta ogni valore minore di $-7/2$ e una e una sola volta ogni valore maggiore di $-7/2$ ma minore di zero, e non assume mai valori maggiori o uguali a zero o il valore $-7/2$, ossia l'equazione $f(x) = x + k$, che equivale a $g(x) = k$, ha

una soluzione	se $k < -7/2$ o se $-7/2 < x < 0$
nessuna soluzione	altrimenti.

PROBLEMA 3

Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ di

$$\boldsymbol{f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + x^9\,) - \operatorname{sen} x^3 - x^9\ .}$$

Determinate poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ di

$$\boldsymbol{f_\alpha(x) = \operatorname{sen}(x^3 + x^9\,) - \operatorname{sen}(\alpha x^3) - x^9\ .}$$

Abbiamo

$$\operatorname{sen} x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} + o(x^3)^5 = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} + o(x^{15})$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x^3 + x^9) &= x^3 + x^9 - \frac{1}{6}(x^3 + x^9)^3 + \frac{1}{120}(x^3 + x^9)^5 + o(x^3 + x^9)^5\\ &= x^3 + x^9 - \frac{1}{6}(x^9 + 3x^15) + \frac{1}{120}x^{15} + o(x^{15})\\ &= x^3 + \frac{5}{6}x^9 - \frac{59}{120}x^{15} + o(x^{15})\ .\end{aligned}$$

Allora

$$\operatorname{sen}(x^3 + x^9\,) - \operatorname{sen} x^3 - x^9 = -\frac{1}{2}x^{15} + o(x^{15})$$

è un infinitesimo di ordine 15 con parte principale $-x^{15}/2$.
Osserviamo che (con la stessa fatica) avremmo potuto tenere gli esponenti un po' più bassi: poniamo

$$g(t) = \operatorname{sen}(t + t^3) - \operatorname{sen} t - t^3\ ,$$

ricaviamo lo sviluppo di Taylor $g(t) = -t^5/2 + o(t^5)$ e osserviamo che $f(x) = g(x^3)$
Per il secondo punto, abbiamo già trattato il caso $\alpha = 1$ dato che $f_1 \equiv f$, mentre per $\alpha \neq 1$ i calcoli precedenti mostrano che

$$f_\alpha(x) = x^3 - \alpha x^3 + o(x^3) = (1-\alpha)x^3 + o(x^3)$$

ha ordine 3 e parte principale $(1-\alpha)x^3$.

PROBLEMA 4

Considerate il cerchio γ centrato in $(2, 2)$ e di raggio 2, e il punto $A = (0, h)$ con $0 < h < 2$.

a) Scrivete l'equazione della retta non verticale r passante per A e tangente a γ.

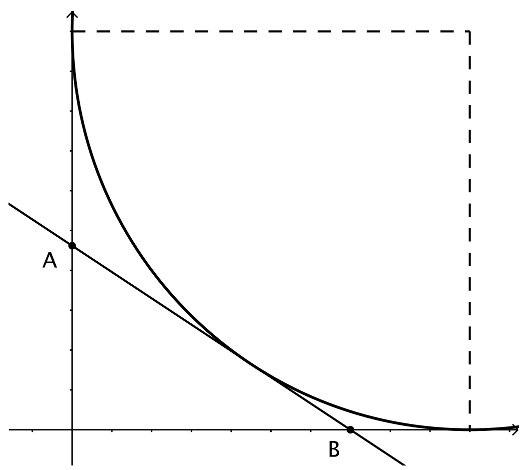
b) Detto $B = (k, 0)$ il punto di intersezione di r con l'asse delle ascisse, determinate k in funzione di h.

c) Determinate in funzione di h l'area del triangolo AOB.

d) Determinate in funzione di h l'area $\mathcal{A}(h)$ della parte di piano che sta nel primo quadrante, al di sopra di r e all'esterno del cerchio γ.

e) Trovate (se esistono) i valori di h per cui l'area $\mathcal{A}(h)$ è minima o massima.

Le rette non verticali per A hanno equazione $y = h + mx$ ossia $mx - y + h = 0$, e quella cercata avrà certamente coefficiente angolare $m < 0$.



Deve inoltre distare 2 dal centro del cerchio, perciò, ricordando che la distanza di un punto (x_0, y_0) dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $|ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$, deve essere

$$2 = \frac{|m \cdot 2 - 2 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2 - h - 2m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

da cui $4(1 + m^2) = (2 - h - 2m)^2 \iff h^2 - 4h = 8m - 4hm$ e quindi

$$m = \frac{h(h - 4)}{4(2 - h)}$$

(un numero negativo, come previsto). L'equazione della retta è allora

$$y = h - \frac{h(4 - h)}{4(2 - h)}x ,$$

e il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse si ricava da

$$0 = h - \frac{h(4-h)}{4(2-h)}x \iff x = 4\frac{2-h}{4-h}$$

perciò

$$k = 4\frac{2-h}{4-h} \ .$$

Detta O l'origine, consideriamo la parte di piano che sta nel primo quadrante e fuori dal cerchio γ: questa è la differenza fra il quadrato $[0,2] \times [0,2]$ e un quarto del cerchio, perciò ha area

$$4 - \frac{1}{4}\pi 2^2 = 4 - \pi \ ,$$

e l'area che dobbiamo calcolare è la differenza fra questa e l'area del triangolo OAB. L'area di questo triangolo vale

$$\frac{1}{2}hk = 2\frac{h(2-h)}{4-h}$$

pertanto l'area richiesta è

$$\mathcal{A}(h) = (4-\pi) - 2\frac{h(2-h)}{4-h} \ .$$

Poniamo

$$g(h) = \frac{h(2-h)}{4-h} \ :$$

dato che $\mathcal{A}(h) = \text{cost.} - 2g(h)$, cercare l'eventuale massimo o minimo di $\mathcal{A}$ per $0 < h < 2$ è uguale a cercare minimo o massimo di g; abbiamo $g(h) > 0$ per $0 < h < 2$,

$$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 2} g(h) = 0$$

(quindi $\inf g = 0$ e g non ha minimo e dunque $\mathcal{A}$ non ha massimo) e

$$g'(h) = \frac{(2-2h)(4-h) + (2h-h^2)}{(4-h)^2} = \frac{h^2 - 8h + 8}{(4-h)^2}$$

che è positiva per $0 < h < 4 - 2\sqrt{2}$ e negativa per $4 - 2\sqrt{2} < h < 2$, pertanto il punto di massimo di g è $4 - 2\sqrt{2}$ e

$$g\big(4 - 2\sqrt{2}\big) = \frac{\big(4 - 2\sqrt{2}\big)(2\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} - 2) = 2(\sqrt{2} - 1)^2 \ .$$

Allora l'area $\mathcal{A}(h)$ ha minimo per $h = \big(4 - 2\sqrt{2}\big)$ e tale minimo vale

$$\min \mathcal{A} = (4 - \pi) - 2 \cdot 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 8\sqrt{2} - 8 - \pi \ .$$

Osserviamo (anche se non è richiesto) che il valore minimo si ottiene con

$$k = 4\frac{2-h}{4-h} = 4\frac{2\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2} = h \ , \qquad m = -\frac{h}{k} = -1$$

ossia quando il segmento è inclinato di $-\pi/4$.

Esercizio 1. L'urna A contiene 3 palline rosse e 5 palline nere, mentre l'urna B contiene 3 palline rosse e 2 palline nere. Prendete a caso una pallina dall'urna A e inseritela nella B. Ora estraete dall'urna B una pallina: qual è la probabilità che sia rossa?

(A) $9/16$.	(C) $1/2$.
(B) $2/3$.	(D) $3/8$.

Ci sono due possibilità: la pallina che travasiamo dall'urna A a quella B è rossa, oppure nera. In 3 casi su 5 (probabilità $3/8$) è rossa, così nell'urna B si trovano 4 palline rosse e 2 nere, dunque dall'urna B esce una pallina rossa con probabilità $4/6 = 2/3$. La probabilità di estrarre una pallina rossa da B, dopo che da A è stata travasata una pallina rossa, è dunque $(3/8) \cdot (2/3) = 1/4$. Invece, se la pallina che passa da A a B è nera (probabilità $5/8$) nella B si trovano 3 palline rosse e 3 nere, quindi esce una rossa con probabilità $3/6 = 1/2$. La probabilità di estrarre una pallina rossa da B, dopo che da A è stata travasata una pallina nera, è dunque $(5/8) \cdot (1/2) = 5/16$. La probabilità che alla fine esca una pallina rossa è dunque $1/4 + 5/16 = 9/16$.

Esercizio 2. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 4^x - 17 + \dfrac{1}{4^{x-2}} \leq 0\}$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $]1,\, 2] \subseteq A$.	(C) $[1,\, 16] \equiv A$.
(B) $]-\infty,\, 0] \subseteq A$.	(D) Nessun'altra affermazione è vera.

Osserviamo che $1/4^{x-2} = 16/4^x$; posto $4^x = t$ e ricordando che dovrà essere $t > 0$, la disuguaglianza diviene $t - 17 + 16/t \leq 0 \iff t^2 - 17t + 16 \leq 0$, dove abbiamo già usato $t > 0$. L'ultima disuguaglianza è verificata per $1 \leq t \leq 16$, quindi quella di partenza è verificata per $0 \leq x \leq 2$.

Esercizio 3. Se $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi/2}} \operatorname{sen}(\log(x))\, dx$, allora quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $I = (\mathrm{e}^{\pi/2} + 1)/2$.	(C) $I = (\mathrm{e}^{\pi/2} - 1)/2$.
(B) $I = (-\mathrm{e}^{\pi/2} + 1)/2$.	(D) $I = (-\mathrm{e}^{\pi} - 1)/2$.

Ponendo $x = \mathrm{e}^t$ abbiamo

$$I \underset{x=\mathrm{e}^t}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \, dt .$$

Una primitiva di $\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t$ si calcola integrando per parti due volte:

$$\int \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\, dt = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t - \int \mathrm{e}^t \cos t\, dt = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t - \Bigl(\mathrm{e}^t \cos t - \int \mathrm{e}^t (-\operatorname{sen} t)\, dt\Bigr)$$

da cui
$$\int \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t - \mathrm{e}^t \cos t\big) + c$$
e
$$I = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t - \mathrm{e}^t \cos t\Big]_0^{\pi/2} = (\mathrm{e}^{\pi/2} - 1)/2\,.$$

Esercizio 4. La successione $\dfrac{\sqrt[n]{5n!} + \sqrt[n]{7^n n!}}{5n + 7\log n}$ ha limite

(A) $\dfrac{8}{5\,\mathrm{e}}$.	(C) $\dfrac{7}{5\,\mathrm{e}}$.
(B) $8/5$.	(D) $+\infty$.

Al denominatore domina chiaramente $5n$, e il numeratore vale $\big(\sqrt[n]{5} + 7\big)\sqrt[n]{n!}$, quindi ricordando che $\sqrt[n]{5} \to 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{5n!} + \sqrt[n]{7^n n!}}{5n + 7\log n} = \frac{8}{5}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{8}{5}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{8}{5\,\mathrm{e}}$$
(l'ultimo limite è noto, o se non lo è si calcola ad esempio con la formula di Stirliong).

Esercizio 5. Se $z = 2 - \mathrm{i}$ e $w = \dfrac{\bar z\sqrt{5} - 2|z|}{z - 1}$ allora

(A) $\Re w = -\Im w$.	(C) $\Re w = 0$.
(B) $\Re w = \Im w$.	(D) $\Im w = 0$.

Dato che $|z| = \sqrt{5}$ abbiamo
$$w = \frac{2\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{5}}{1 - \mathrm{i}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = \frac{\sqrt{5}}{2}(1 - \mathrm{i})\,.$$

Esercizio 6. Nello sviluppo di Taylor (centrato in $x_0 = 0$) di $f(x) = \tan\big(\cos(x^3 + 17x)\big)$, il coefficiente di x^{27} è

(A) 0 .	(C) $-17/27!$.
(B) -17 .	(D) $17/27!$.

La funzione f è composta da due funzioni dispari (la tangente e $x^3 + 17x$) e una pari (il coseno), quindi è pari. Allora tutte le sue derivate di ordine dispari sono funzioni dispari, e in zero si annullano, quindi il coefficiente di x^{27} è $f^{(27)}(0)/27! = 0$.

Esercizio 7. Se $\sum_n a_n$ diverge positivamente allora

(A) $\sum_n \|a_n\| = +\infty$.	(C) $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$.
(B) nessuna delle altre risposte è vera.	(D) $(a_{n+1})/a_n \to L > 1$.

Dato che non è detto che a_n sia (almeno definitivamente) positiva, le risposte che ricordano i criteri della radice e del rapporto sono certamente da scartare. Poi, se $\sum_n |a_n|$ convergesse allora anche $\sum_n a_n$ dovrebbe convergere, dunque $\sum_n |a_n| = +\infty$.