Risoluzione del compito n. 4 (Giugno 2017)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^2 - 2\bar{w} = -2\mathrm{i} \\ w^2 + \mathrm{i}\bar{z}^2 = -2 . \end{cases}$$

Si può risolvere in vari modi: o ricavando w dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, che così diventa $\bar{z}^4 = -4$, oppure ricavando z^2 dalla prima e sostituendolo nella seconda, che diventa $w^2 + 2\mathrm{i}w = 0$. Ambedue le strade sono molto facili, e le soluzioni (z, w) sono

$$(1 + \mathrm{i}, -2\mathrm{i}) , \quad (-1 - \mathrm{i}, -2\mathrm{i}) , \quad (1 - \mathrm{i}, 0) , \quad (-1 + \mathrm{i}, 0) .$$

PROBLEMA 2

Data la funzione

$$\boldsymbol{F(x) = \int_0^x (t^2 - 2)\,\mathrm{e}^t\,dt}\ ,$$

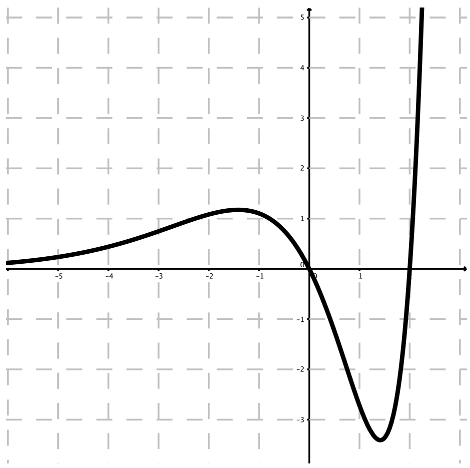
calcolatene i limiti agli estremi del dominio, il segno, le regioni di monotonia, la natura dei punti stazionari e le regioni di concavità/convessità. Disegnate, facendo uso dei risultati ottenuti in precedenza, un grafico di $\boldsymbol{F}$.

Calcoliamo l' integrale per parti:

$$\int (t^2-2)\,\mathrm{e}^t\,dt = (t^2-2)\,\mathrm{e}^t - \int 2t\,\mathrm{e}^t\,dt = (t^2-2)\,\mathrm{e}^t - \Big(2t\,\mathrm{e}^t - \int 2\,\mathrm{e}^t\,dt\Big) = (t^2-2t)\,\mathrm{e}^t + c\ ,$$

per cui

$$F(x) = (x^2 - 2x)\,\mathrm{e}^x\ .$$



Abbiamo subito

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0^+\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\ ,$$

$$F(x) > 0 \iff x^2 - 2x > 0 \iff x < 0 \text{ oppure } x > 2\ .$$

Dal teorema fondamentale del calcolo (o derivando direttamente) sappiamo che

$$F'(x) = (x^2 - 2)\,\mathrm{e}^x$$

per cui

$$F'(x) > 0 \iff x^2 - 2 > 0 \iff x < -\sqrt{2} \text{ oppure } x > \sqrt{2}$$

e la funzione F è strettamente crescente in $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,]$. Il punto $-\sqrt{2}$ è di massimo locale e $F(-\sqrt{2}\,) = (2 + 2\sqrt{2}\,)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$, mentre essendo

$$F(\sqrt{2}\,) = (2 - 2\sqrt{2}\,)\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}} < 0$$

il punto $-\sqrt{2}$ è di minimo assoluto per F . Calcoliamo la derivata seconda: è

$$F''(x) = (x^2 + 2x - 2)\,\mathrm{e}^x$$

quindi

$$F''(x) > 0 \iff x^2 + 2x - 2 > 0 \iff x < -1 - \sqrt{3} \text{ oppure } x > -1 + \sqrt{3}\,.$$

Allora F è strettamente convessa in $]-\infty, -1-\sqrt{3}]$ e in $[-1+\sqrt{3}, +\infty[$ mentre è strettamente concava in $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$. Come era da aspettarsi, il primo flesso si ha a sinistra del punto di massimo locale, e il secondo flesso fra il punto di massimo locale e quello di minimo.

PROBLEMA 3

Data la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \arctan(x + x^2) - \log(1 + x + \alpha x^2) - \frac{5}{6}x^3} \ ,$$

calcolate al variare di $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4} \ .$$

Abbiamo

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4) \ , \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

perciò

$$\begin{aligned} \arctan(x+x^2) &= (x+x^2) - \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x+x^2)^4 \\ &= (x+x^2) - \frac{1}{3}(x^3+3x^4) + o(x^4) = x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^4 + o(x^4) \ . \end{aligned}$$

Invece per l'altro addendo iniziamo con lo sviluppo corto

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \log(1+x+\alpha x^2) &= (x+\alpha x^2) - \frac{1}{2}(x+\alpha x^2)^2 + o(x+\alpha x^2)^2 \\ &= x + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

da cui, essendo $-5x^3/6 = o(x^2)$,

$$f(x) = \Big(\frac{3}{2} - \alpha\Big)x^2 + o(x^2) \ .$$

In particolare per $\alpha \neq 3/2$ la funzione f è un infinitesimo di ordine 2 ; essendo

$$(3/2) - \alpha > 0 \iff \alpha < 3/2$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Big(\frac{3}{2} - \alpha\Big)x^2 + o(x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Big(\frac{3}{2} - \alpha\Big) + \frac{o(x^2)}{x^2}}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3/2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3/2. \end{cases}$$

Nel caso $\alpha = 3/2$ lo sviluppo corto che abbiamo utilizzato non ci dà risultati, dato che ci porta solo a $f(x) = o(x^2)$ e abbiamo perso tutte le informazioni. Allunghiamo lo sviluppo (lasciando per brevità α fino alla fine)

$$\begin{aligned}
&\log(1 + x + \alpha x^2) \\
&\quad = (x + \alpha x^2) - \frac{1}{2}(x + \alpha x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + \alpha x^2)^3 - \frac{1}{4}(x + \alpha x^2)^4 + o(x + \alpha x^2)^4 \\
&\quad = (x + \alpha x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + 2\alpha x^3 + \alpha^2 x^4) + \frac{1}{3}(x^3 + 3\alpha x^4) - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\
&\quad = x + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)x^2 + \Big(\frac{1}{3} - \alpha\Big)x^3 + \Big(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4}\Big)x^4 + o(x^4) \\
&\quad = x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Allora

$$f(x) = x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^4 + o(x^4) - x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 = -\frac{9}{8}x^4 + o(x^4)$$

e possiamo calcolare il limite nel caso restante

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4} = -\frac{9}{8}\ .$$

PROBLEMA 4

Calcolate il valore dell' integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(x^3\,\mathrm{e}^{-x^4}+\frac{\log x}{2x^2}\right)dx$ **.**

Calcoliamo separatamente: per sostituzione

$$\int_1^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x^4}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x^4=t}}{=} \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,dt=\frac{1}{4}\lim_{M\to+\infty}\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_1^M=\frac{1}{4\,\mathrm{e}}\ ;$$

invece per parti

$$\int\frac{\log x}{2x^2}\,dx=-\frac{1}{2x}\log x-\int\Big(-\frac{1}{2x}\Big)\frac{1}{x}\,dx=-\frac{1}{2x}-\frac{\log x}{2x}+c\ ,$$

per cui

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{2x^2}\,dx=\lim_{M\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2x}-\frac{\log x}{2x}\Big]_1^M=\frac{1}{2}$$

e il valore cercato è

$$\frac{1}{4\,\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\ .$$

Esercizio 1. Il numero di soluzioni reali dell'equazione $x^6 - 6x = -4/7$ è

(A) 2 .
(B) 0 .
(C) 6 .
(D) dipende da k .

La funzione $f(x) = x^6 - 6x$ è continua su $\mathbb{R}$, tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ e ha derivata negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$, quindi $x = 1$ è il punto di minimo assoluto di f ed f è iniettiva tanto in $]-\infty, 1]$ quanto in $[1, +\infty[$. Ma $\min f = f(1) = -5$, e abbiamo certamente $-5 < -4/7$, quindi l'equazione $f(x) = -4/7$ ha due soluzioni (una prima e una dopo $x = 1$).

Esercizio 2. Un intervallo in cui $\operatorname{sen} x > \tan x$ è

(A) $]2, 3[$.
(B) $]7/2, 9/2[$.
(C) $]-2, 0[$.
(D) $]15\pi, 16\pi[$.

La tangente non è definita in tutto l'intervallo $]-2, 0[$ dato che $-2 < -\pi/2 < 0$, e lo stesso per $]15\pi, 16\pi[$, quindi queste due risposte sono certamente da scartare. Poi in $]2, 3[\subset]\pi/2, \pi[$ il seno è positivo e il coseno negativo, dunque $\operatorname{sen} x > 0 > \tan x$, mentre in $]7/2, 9/2[\subset]\pi, 3\pi/2[$ il seno è negativo ma lo è anche il coseno, quindi $\operatorname{sen} x < 0 < \tan x$.

Esercizio 3. Il limite per $x \to 0$ della funzione $\dfrac{2^x - 3^x}{4^x - \mathrm{e}^x}$ vale

(A) $\dfrac{\log 3 - \log 2}{1 - \log 4}$.
(B) $+\infty$.
(C) 0 .
(D) -1 .

Sappiamo che $\mathrm{e}^t = 1 + t + o(t)$ e che $2^x = \mathrm{e}^{x \log 2}$, e lo stesso per gli altri, quindi

$$\begin{aligned} \frac{2^x - 3^x}{4^x - \mathrm{e}^x} &= \frac{1 + x\log 2 + o(x) - 1 - x \log 3}{1 + x \log 4 + o(x) - 1 - x} \\ &= \frac{x(\log 2 - \log 3) + o(x)}{x(\log 4 - 1) + o(x)} \to \frac{\log 2 - \log 3}{\log 4 - 1} = \frac{\log 3 - \log 2}{1 - \log 4} . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_n (2 - |1 - \alpha|)^n$

(A) converge se $\alpha \in]2, 4[$.
(B) converge se $-2 \le \alpha \le 0$.
(C) converge se $|1 - \alpha| < 3$.
(D) è indeterminata se $\alpha = 2$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 2 - |1 - \alpha|$, perciò sappiamo che converge per $-1 < q < 1$, diverge per $q \ge 1$ ed è indeterminata per $q \le -1$. Ora

$$-1 < 2 - |1 - \alpha| < 1 \iff 1 < |1 - \alpha| < 3 .$$

I numeri α la cui distanza dal numero 1 è compresa fra 1 e 3 sono

$$-2 < \alpha < 0 \qquad \textbf{o} \qquad 2 < \alpha < 4 \ :$$

questi sono i valori per i quali la serie converge, mentre è divergente per

$$2 - |1-\alpha| \geq 1 \iff |1-\alpha| \leq 1 \iff 0 \leq \alpha \leq 2$$

ed indeterminata per quelli restanti, ossia per $\alpha \leq -2$ e per $\alpha \geq 4$.

Esercizio 5. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{sen}(4x) + 2b\cos x^2 + b & \text{se } x \leq 0 \\ 2x+6 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a = 1/2$, $b = 2$.

(B) $a = 2$, $b = 6$.

(C) $a = 1/4$, $b = 2$.

(D) $a = 1/4$, $b = 3$.

Basta controllare continuità e derivabilità in zero. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 3b\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 6$$

perciò deve essere $b = 2$ per avere che f è continua su $\mathbb{R}$. Poi abbiamo

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4a\cos(4x) - 4bx\,\mathrm{sen}\,x^2\,,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 4a\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$$

e per avere la derivabilità anche in zero deve essere $a = 1/2$ (oltre alla già vista $b = 2$).

Esercizio 6. Sia $w = \dfrac{z^2 - \bar{z}^2 + |z|^2 - z - \bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)+2}$, dove $z = 1 + \mathrm{i}$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $\Re w < \Im w$.

(B) $\Re w > \Im w$.

(C) $\Im w = -\frac{12}{13\mathrm{i}}$.

(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

Il numero z ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, dunque z^2 ha modulo 2 e argomento $\pi/2$ ossia $z^2 = 2\mathrm{i}$. Allora $\bar{z}^2 = \overline{z^2} = -2\mathrm{i}$ e

$$w = \frac{2\mathrm{i} - (-2\mathrm{i}) + 2 - (1+\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i}) + 2} = \frac{4\mathrm{i}}{3}$$

ha parte reale zero e parte immaginaria $4/3 > 0$.

Esercizio 7. Posto $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{(x^3+1)^\alpha x^{2\alpha}}\,dx$, *sia* $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, I(\alpha) \text{ converge}\}$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $]1, 3/2[\subset S$.	(C) $]-\infty, 1[\subset S$.
(B) $]3/5, +\infty[\subset S$.	(D) $S \equiv]2/5, 1[$.

Per $x \to 0$ abbiamo

$$\frac{x \arctan x}{(x^3+1)^\alpha x^{2\alpha}} \sim \frac{x^2}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha-2}}$$

e per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge vicino a zero se e solo se $2\alpha - 2 < 1 \iff \alpha < 3/2$. Invece per $x \to +\infty$

$$\frac{x \arctan x}{(x^3+1)^\alpha x^{2\alpha}} \sim \frac{x}{x^{5\alpha}} = \frac{1}{x^{5\alpha-1}}$$

e l'integrale converge all'infinito se e solo se $5\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2/5$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $2/5 < \alpha < 3/2$, ossia

$$S = \left]\frac{2}{5}, \frac{3}{2}\right[$$

e la sola risposta corretta è $]1, 3/2[\subset S$.