Risoluzione del compito n. 5 (Luglio 2017)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2z^2}{w} = (1-\mathrm{i})^2 \\ 2z^2 w = (1+\mathrm{i})^2 \, . \end{cases}$$

Intanto il sistema si riscrive

$$\begin{cases} \dfrac{2z^2}{w} = -2\mathrm{i} \\ 2z^2 w = 2\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{z^2}{w} = -\mathrm{i} \\ z^2 w = \mathrm{i} \, . \end{cases}$$

Ora, osservando che certamente $z \neq 0$ e $w \neq 0$, si può ricavare z^2 da una equazione, o ricavare w, o moltiplicare fra loro le equazioni, o dividerle. In uno qualunque dei modi si arriva a uno dei sistemi

$$\begin{cases} z^2 = -\mathrm{i}w \\ w^2 = -1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} z^4 = 1 \\ w = \dfrac{\mathrm{i}}{z^2} \end{cases}$$

e otteniamo le quattro soluzioni

$$z = \pm 1 \, , \; w = \mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z = \pm \mathrm{i} \, , \; w = -\mathrm{i} \, .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x+2}$.

a) **Determinate il dominio e il segno di f , la derivata prima e la derivata seconda.**

b) **Determinate i limiti agli estremi del dominio per le funzioni f , f' e f'' .**

c) **Determinate gli intervalli di monotonia e quelli di concavità/convessità, i punti di massimo e minimo, i punti di flesso, gli asintoti, l' immagine di f e tracciate un grafico di f .**

d) **Calcolate l'area della parte di piano compresa fra il grafico di f e l'asse delle ascisse con $0 \le x \le 2$.**

e) **Calcolate l' integrale di f sul suo dominio.**

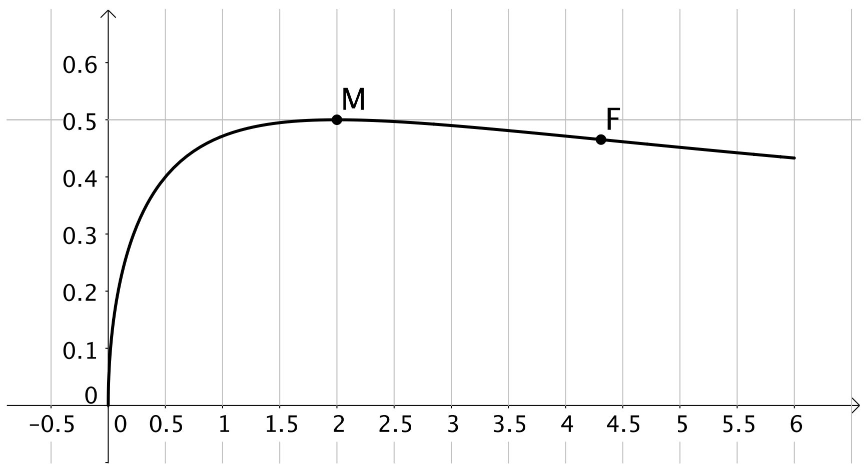
La funzione f è definita solo per $x \ge 0$ ed è sempre positiva (salvo in zero dove si annulla). Inoltre è una funzione continua (e in particolare ha limite uguale a $f(0) = 0$ per $x \to 0^+$), che tende a 0^+ per $x \to +\infty$. Per $x > 0$ è certamente derivabile (infinite volte) e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2-x}{\sqrt{x}(x+2)^2} \ , \qquad f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}x\sqrt{x}(x+2)^3}(3x^2 - 12x - 4) \ .$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to 0^+} f''(x) = -\infty \ ,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0^- \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0^+ \ :$$

dalla prima relazione, visto che f è continua in zero, segue per un corollario del Teorema di de l'Hôpital che $f'_+(0) = +\infty$ e in particolare che f non è derivabile in zero.



Il grafico è fuori scala, dato che se no risulterebbe un po' piatto. Per quanto riguarda la monotonia abbiamo

$$f'(x) > 0 \iff 0 < x < 2$$

quindi si ha un massimo assoluto per $x = 2$, dove f vale $1/2$, f cresce strettamente in $[0, 2]$ e decresce strettamente in $[2, +\infty[$. Allora l'immagine tramite f di $[0, 2]$ è $[f(0), f(2)] = [0, 1/2]$, e visto il limite all'infinito anche l'immagine di $[2, +\infty[$ è $]0, 1/2]$. Allora l'immagine di f è l'unione delle due, che è $[0, 1/2]$. Il punto M corrisponde al massimo assoluto, mentre il minimo assoluto vale zero ed è realizzato per $x = 0$.
La derivata seconda si annulla per $x = 2+4/\sqrt{3}$, è negativa prima e positiva dopo: allora f è strettamente concava in $[0, 2 + 4/\sqrt{3}]$ e strettamente convessa in $[2 + 4/\sqrt{3}, +\infty[$, ed ha un flesso per $x = 2+4/\sqrt{3}$: il punto F corrisponde al flesso. Per quanto riguarda gli asintoti, abbiamo un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
Calcoliamo

$$\int \frac{\sqrt{2x}}{x+2} \underset{\substack{\uparrow \\ x=t^2}}{=} 2\sqrt{2} \int \frac{t^2+2-2}{t^2+2}\, dt = 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} \int \frac{1}{t^2+2}\, dt \; .$$

Ora

$$\int \frac{1}{t^2+2}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ t=s\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2} \int \frac{1}{2(s^2+1)}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan s + c \underset{\substack{\uparrow \\ s=t/\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

per cui

$$2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} \int \frac{1}{t^2+2}\, dt = 2\sqrt{2}t - 4 \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c \underset{\substack{\uparrow \\ t=\sqrt{x}}}{=} 2\sqrt{2}\sqrt{x} - 4 \arctan \sqrt{\frac{x}{2}} + c$$

(e prudenza vuole che a questo punto si controlli che effettivamente la derivata della funzione ottenuta è la funzione integranda). Allora

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \Big[2\sqrt{2}\sqrt{x} - 4 \arctan \sqrt{\frac{x}{2}} \Big]_0^2 = 4 - 4 \arctan 1 = 4 - 4\frac{\pi}{4} = 4 - \pi$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{K \to +\infty} \Big[2\sqrt{2}\sqrt{x} - 4 \arctan \sqrt{\frac{x}{2}} \Big]_0^K = +\infty \; .$$

PROBLEMA 3

Calcolate, al variare di $\in \mathbb{R}0$, il valore di $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^4\cos x}-\frac{1}{x^3\operatorname{sen} x}+\frac{\alpha}{x^2}\Big)$.

Intanto riscriviamo

$$\frac{1}{x^4\cos x}-\frac{1}{x^3\operatorname{sen} x}+\frac{\alpha}{x^2}=\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x+\alpha x^2\operatorname{sen} x\cos x}{x^4\operatorname{sen} x\cos x}$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x+\alpha x^2\operatorname{sen} x\cos x}{x^4\operatorname{sen} x\cos x}\\ &\qquad=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\big((\operatorname{sen} x)/x\big)\cos x}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x+\alpha x^2\operatorname{sen} x\cos x}{x^5}\end{aligned}$$

e quindi dobbiamo calcolare solo l'ultimo limite (visto che il primo limite al secondo membro vale 1). Usiamo gli sviluppi di Taylor ben noti di seno e coseno: dato che il denominatore è di ordine 5, cerchiamo di sviluppare il numeratore in modo da vedere il termine del quinto ordine; otteniamo

$$\operatorname{sen} x - x\cos x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-x\Big(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\Big)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+o(x^5)$$

e (qui basta uno sviluppo più corto dato che andrà moltiplicato per x^2)

$$\operatorname{sen} x\cos x=\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)=x-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

per cui

$$x^2\operatorname{sen} x\cos x = x^3-\frac{2x^5}{3}+o(x^5)\,.$$

Allora

$$\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x+\alpha x^2\operatorname{sen} x\cos x}{x^5}=\Big(\frac{1}{3}+\alpha\Big)x^{-2}+\Big(-\frac{1}{30}-\frac{2\alpha}{3}\Big)+\frac{o(x^5)}{x^5}$$

pertanto se $\alpha+1/3\neq 0$ il limite è infinito e precisamente vale $+\infty$ se $\alpha>-1/3$ e $-\infty$ se $\alpha<-1/3$. Invece se $\alpha=-1/3$ il coefficiente di x^{-2} si annulla e il limite vale

$$-\frac{1}{30}-\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3}=\frac{17}{90}\,.$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^4\cos x}-\frac{1}{x^3\operatorname{sen} x}+\frac{\alpha}{x^2}\Big)=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>-1/3\\ 17/90 & \text{se } \alpha=-1/3\\ -\infty & \text{se } \alpha<-1/3.\end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia x un parametro reale.

a) Determinate per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_n n\,\mathrm{e}^{-n(x^2-2x)}$ risulta convergente.

b) Determinate per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_n n^{-2}\,\mathrm{e}^{-n(x^2-2x)}$ risulta convergente.

Le serie sono a termini positivi. Proviamo ad applicare il criterio della radice n-esima: abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,\mathrm{e}^{-n(x^2-2x)}} = \mathrm{e}^{2x-x^2} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{2x-x^2}$$

e anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-2}\,\mathrm{e}^{-n(x^2-2x)}} = \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \mathrm{e}^{2x-x^2} ,$$

pertanto se $\mathrm{e}^{2x-x^2} > 1$ entrambe le serie divergono, se $\mathrm{e}^{2x-x^2} < 1$ entrambe convergono, e se $\mathrm{e}^{2x-x^2} = 1$ dobbiamo cercare la risposta con qualche altro metodo. Osserviamo che se $\mathrm{e}^{2x-x^2} = 1$ abbiamo anche $\mathrm{e}^{-n(x^2-2x)} = 1$ e quindi in questo caso le serie si riducono a $\sum n$ e $\sum n^{-2}$, dunque la prima diverge e la seconda converge. Ma

$$\mathrm{e}^{2x-x^2} > 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x - x^2 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 < x < 2 ,$$

pertanto possiamo scrivere la risposta: la prima serie converge per $x < 0$ e per $x > 2$, e diverge per $0 \le x \le 2$; la seconda serie converge per $x \le 0$ e per $x \ge 2$, e diverge per $0 < x < 2$.

Esercizio 1. Se $z = 1 + \mathrm{i}$ e $w = \dfrac{|z| - 2\mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}\bar{z} - 2\mathrm{i}}$

(A) $\Re w + \Im w = (\sqrt{2} - 4)/5$.	(C) $\Im w = -4/5$.
(B) $\Re w = 3\sqrt{2} - 2$.	(D) $w \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $|z|^2 = 2$ quindi

$$w = \frac{\sqrt{2} - 2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) - 2\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2} - 2\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{2} - 2\mathrm{i})(3 - \mathrm{i})}{(3 + \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})} = \frac{(3\sqrt{2} - 2) + \mathrm{i}(-6 - \sqrt{2})}{10} .$$

Tre risposte sono chiaramente errate, e $\Re w + \Im w = (\sqrt{2} - 4)/5$.

Esercizio 2. Lanciando tre monete, la probabilità che escano tre teste è

(A) $1/2^3$.	(C) $3!/2^3$.
(B) $3/3!$.	(D) $1/3!$.

Per ciascuna moneta la probabilità che esca testa è $1/2$, dunque la probabilità di tre teste è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 1/2^3$.

Esercizio 3. Si ha $\sqrt{x} > \sqrt{2x - x^2}$ per

(A) $1 < x \leq 2$.	(C) $x < 0$ o $x > 1$.
(B) $x \leq 0$ o $x \geq 1$.	(D) nessun $x \in \mathbb{R}$.

Occorre anzitutto che le due radici esistano, ossia che $x \geq 0$ e che $2x - x^2 = x(2 - x) \geq 0$, il che si verifica solo per $0 \leq x \leq 2$. Ricordandoci queste condizioni, possiamo elevare al quadrato ambo i membri della disequazione e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x > 2x - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x > 0 . \end{cases}$$

Ma l'ultima disuguaglianza è vera solo per $x < 0$ (escluso per via della prima condizione) o per $x > 1$. La soluzione è perciò $1 < x \leq 2$.

Esercizio 4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} + b & \text{se } x \leq 0 \\ x \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$, per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a = 1$, $b = -1$.	(C) $a = -2\,\mathrm{e}$, $b = -1 - 2\,\mathrm{e}/3$.
(B) $a = -b$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.	(D) $b = -1$, a qualsiasi.

Non vi sono problemi di derivabilità per $x \neq 0$, quindi studiamo solo questo punto. Per essere derivabile anche in zero, f deve essere continua, ma

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \mathrm{e}^0 + b = \mathrm{e} + b , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

perciò deve essere $b = -1$. A questo punto sappiamo che per $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{ax} & \text{se } x < 0 \\ \cos x - x \operatorname{sen} x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = a \ , \ \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

e dunque per un corollario del Teorema di de l'Hôpital f è derivabile in zero se e solo se (oltre alla condizione $b = -1$ già vista) si ha $a = 1$.

Esercizio 5. La serie $\sum \dfrac{n^2(1 + n^\alpha)}{n^3 + n^{2\alpha}}$ converge se e solo se

(A) $\alpha > 3$.	(C) $\alpha < 0$.
(B) $\alpha > 3/2$.	(D) $1/2 < \alpha < 3/2$.

Chiamiamo a_n il termine generale della serie. Per $\alpha \leq 0$ abbiamo

$$n^2(1 + n^\alpha) \simeq n^2 \ , \qquad n^3 + n^{2\alpha} \simeq n^3$$

e quindi $a_n \simeq 1/n$ e la serie non converge. Invece per $\alpha > 0$ il numeratore si comporta come $n^{2+\alpha}$, mentre al denominatore dobbiamo distinguere due casi ulteriori: $2\alpha \leq 3$ e $2\alpha > 3$. Nel primo, il denominatore si comporta come n^3 quindi $a_n \simeq n^{2+\alpha}/n^3 = 1/n^{1-\alpha}$ e di nuovo la serie non converge. Nel secondo, ossia se $\alpha > 3/2$,

$$a_n \simeq \frac{n^{2+\alpha}}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$$

e perché la serie converga deve essere $\alpha - 2 > 1$ ossia $\alpha > 3$.

Esercizio 6. L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx$ vale

(A) $(1/4) + (\pi/8)$.	(C) $(1/6\sqrt{2}) - (1/3)$.
(B) $1/6\sqrt{2}$.	(D) $(\pi - 2)/8$.

Bisognerebbe sapere a memoria una primitiva di $\cos^2 x$, ma altrimenti la si può calcolare per parti. In un modo o nell'altro

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx = \left[\frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ .$$

Esercizio 7. Nello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di $x \log\big((1 + 2x)^2\big)$ compare il termine

(A) $(64/5)x^6$.	(C) $-2x^2$.
(B) $(8/5)x^5$.	(D) $x^6/5$.

Per x abbastanza vicino a zero (basta che risulti $1+2x>0$) abbiamo

$$\begin{aligned}\log\bigl((1+2x)^2\bigr) &= 2\log(1+2x) = 2\Bigl(2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\frac{(2x)^5}{5}+o(x^5)\Bigr)\\ &= 2\Bigl(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+\frac{32}{5}x^5+o(x^5)\Bigr)\end{aligned}$$

per cui

$$x\log\bigl((1+2x)^2\bigr) = 4x^2-4x^3+\frac{16}{3}x^4-8x^5+\frac{64}{5}x^6+o(x^6)\ .$$
