Risoluzione del compito n. 3 (Febbraio 2017/2)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}z + w = 7\Re w \\ \dfrac{|z|}{\Re w} = \dfrac{\sqrt{13}}{|\Re w|} \\ |w| = 2 \, . \end{cases}$$

La seconda equazione dice che $\Re w \neq 0$ e che, dato che il secondo membro è positivo, anche il primo lo deve essere, e in particolare che $\Re w > 0$. A questo punto la seconda equazione si riduce a $|z| = \sqrt{13}$. Dalla prima equazione ricaviamo che

$$7\Re w - w = \sqrt{3}z$$

e sostituendo $w = x + \mathrm{i}y$

$$6x - \mathrm{i}y = \sqrt{3}z \, .$$

In particolare

$$\sqrt{39} = |\sqrt{3}z| = |6x - \mathrm{i}y| = \sqrt{36x^2 + y^2}$$

ma dalla terza equazione abbiamo $x^2 + y^2 = 2^2 = 4$ per cui

$$39 = 36x^2 + y^2 = 35x^2 + 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 1$$

e quindi $x = \pm 1$ e scartando $x = -1$ (abbiamo già visto che deve essere $x > 0$) resta $x = 1$. Da $|w| = 2$ ricaviamo $y = \pm\sqrt{3}$ e quindi

$$w_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \, , \qquad w_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \, .$$

Dall'uguaglianza $z\sqrt{3} = 7\mathbb{R}w - w = 7 - w$ otteniamo

$$z_1 = (6 + \mathrm{i}\sqrt{3})/\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \mathrm{i} \, , \qquad z_2 = 2\sqrt{3} - \mathrm{i}$$

e le soluzioni (z, w) sono le due coppie (z_1, w_1) e (z_2, w_2).

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x+6}$ **.**

a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, il segno, gli intervalli di monotonia, gli intervalli di convessità/concavità.**

b) **Determinate l' immagine di** f **.**

c) **Disegnate il grafico di** f **.**

d) **(SOLO ANALISI 1) Calcolate la controimmagine** $f^{-1}([1/3,+\infty))$ **.**

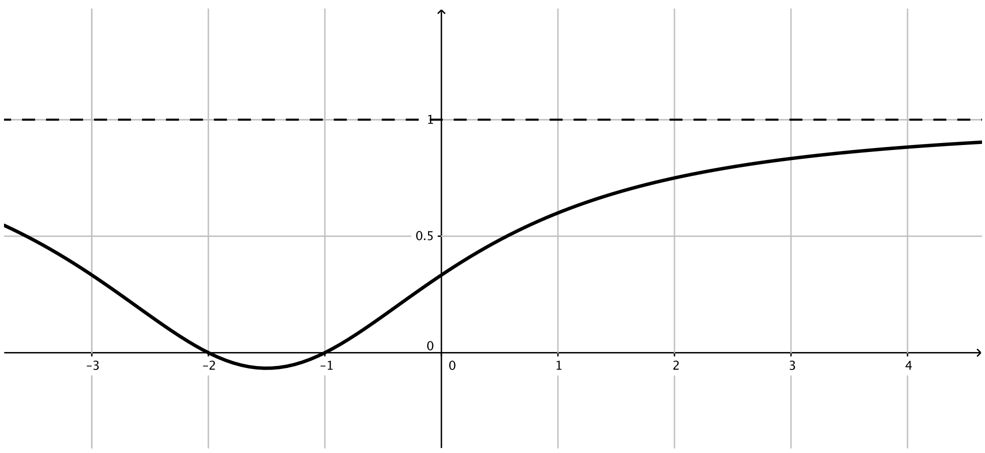
Possiamo riscrivere (non è indispensabile, ma alcuni calcoli vengono semplificati)

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x+6} = \frac{x^2+3x+6-4}{x^2+3x+6} = 1 - \frac{4}{x^2+3x+6} \ ,$$

e useremo entrambe le espressioni di f (che tanto sono uguali). Il denominatore $x^2 + 3x + 6 = (x+3/2)^2 + 15/4$ è sempre positivo, quindi f è definita su $\mathbb{R}$. Inoltre $4/(x^2+3x+6) \to 0$ per $x \to \pm\infty$ quindi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

ed f ha un asintoto orizzontale. Il segno di f è quello di $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, quindi f si annulla per $x = -1$ e $x = -2$, è negativa per $-2 < x < -1$ e positiva altrove.



La derivata di f vale

$$f'(x) = \frac{4}{(x^2+3x+6)^2}(2x+3)$$

ed è negativa per $x < -3/2$, nulla per $x = -3/2$ dove c'è un minimo assoluto, e positiva per $x > -3/2$. In particolare f è strettamente decrescente per $x \le -3/2$ e strettamente crescente per $x \ge -3/2$. Osserviamo che $f(-3/2) = -1/15$ e rispondiamo subito

alla domanda sull'immagine. Su $]-\infty,-3/2]$ la funzione è strettamente decrescente, ha minimo $f(-3/2)$ ed estremo superiore pari al limite a $-\infty$, cioè 1, quindi per il Teorema dei valori intermedi la sua immagine su questo intervallo è l'intervallo $[-1/15,1[$. Lo stesso vale su $[-3/2,+\infty[$, quindi in definitiva l'immagine di f è $[-1/15,1[$.
Per studiare la convessità dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\cdot\frac{2(x^2+3x+6)^2-2(2x+3)(x^2+3x+6)(2x+3)}{(x^2+3x+6)^4} \\ &= -\frac{24}{(x^2+3x+6)^3}(x^2+3x+1)\ : \end{aligned}$$

questa si annulla per $x=-(3/2)\pm\sqrt{5}/2$, è positiva fra i due punti in cui si annulla e negativa all'esterno, quindi f è strettamente concava in $]-\infty,-(3/2)-\sqrt{5}/2]$, strettamente convessa in $[-(3/2)-\sqrt{5}/2,-(3/2)+\sqrt{5}/2]$ e strettamente concava in $[-(3/2)+\sqrt{5}/2,+\infty[$.
Avremmo potuto determinare la controimmagine anche con ragionamenti di monotonia e qualche calcolo, ma dato che questi sono simili a quelli che faremo tanto vale procedere direttamente. Dobbiamo trovare la soluzione della disequazione $f(x)\geq 1/3$, ossia, dato che $x^2+3x+6>0$, di

$$x^2+3x+2\geq\frac{1}{3}(x^2+3x+6)\qquad\Longleftrightarrow\qquad 2(x^2+3x)\geq 0$$

e quindi la controimmagine di $[1/3,+\infty[$ è $]-\infty,-3]\cup[0,+\infty[$.

PROBLEMA 3

Sia $f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \sqrt{1-(x^2/2)}$. Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha f(x)}{x^6} .$$

Dato che si tratta di calcolare un limite, non è indispensabile scrivere gli sviluppi di Taylor sin dall'inizio: basta osservare che i due argomenti delle radici tendono a 1, quindi moltiplicando e dividendo per la somma delle radici

$$f(x) = \frac{\cos(x) - (1-x^2/2)}{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{1-(x^2/2)}} = \frac{x^4/24 + o(x^4)}{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{1-(x^2/2)}} = \frac{x^4}{48} + o(x^4) .$$

A questo punto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha f(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{6-\alpha}} = \frac{1}{48} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

vale zero se $2-\alpha < 0$ ossia se $\alpha > 2$, vale $+\infty$ se $\alpha < 2$ e $1/48$ se $\alpha = 2$.

PROBLEMA 4

Sia γ la metà superiore dell'ellisse di equazione $(x^2/4) + y^2 = 1$ e siano A e B i due punti di γ aventi ascissa rispettivamente 1 e $\sqrt{3}$. Determinate l'area della parte di piano che sta al di sotto di γ e al di sopra del segmento AB.

La curva γ è il grafico della funzione

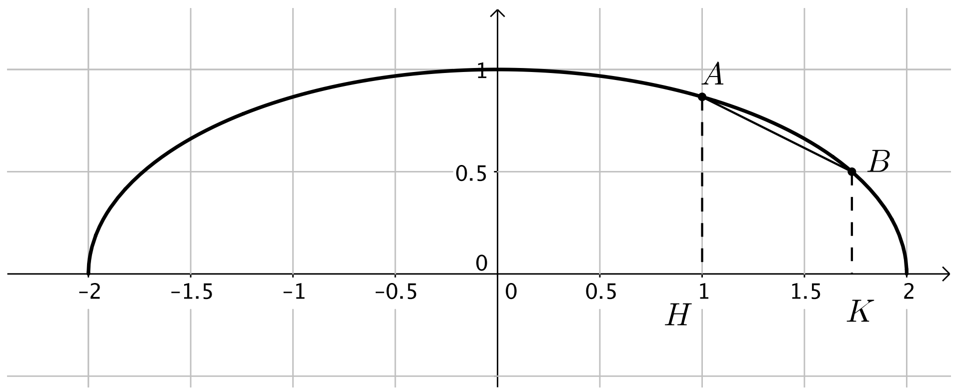
$$f(x) = +\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \ ,$$

quindi le ordinate di A e B sono rispettivamente

$$f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \qquad f\big(\sqrt{3}\,\big) = \frac{1}{2}$$

e dunque

$$A = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ , \qquad B = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) \ .$$



La funzione f è strettamente concava (si vede rapidamente che f' è decrescente per $x > 0$), quindi l'intero arco di γ fra A e B sta sopra al segmento (la precisazione è necessaria, perché se γ passasse un po' sopra e un po' sotto al segmento il calcolo che segue sarebbe più complicato). A questo punto calcoliamo l'area della parte di sottografico di f con $1 \le x \le \sqrt{3}$, poi dovremo togliere l'area del trapezio di vertici $ABKH$. Abbiamo

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=2t}}{=} 2\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 - t^2}\,dt \ .$$

Una primitiva di $\sqrt{1-t^2}$ si potrebbe anche sapere a memoria ottenendo

$$\cdots = 2\Big[\frac{t\sqrt{1-t^2}+\operatorname{arcsen} t}{2}\Big]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = 2\frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/2)-\operatorname{arcsen}(1/2)}{2} = 2\frac{\pi/3-\pi/6}{2} = \frac{\pi}{6}\ ,$$

ma se non la si sa a memoria basta ricostruire sostituendo

$$\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ t=\operatorname{sen} s}}{=} 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 s\, ds = 2\Big[\frac{s+\operatorname{sen} s\cos s}{2}\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}$$

(questa **va** saputa a memoria, se non la si sa occorre trovarla integrando per parti).
L'area del trapezio è

$$\frac{(\sqrt{3}/2)+(1/2)}{2}(\sqrt{3}-1) = \frac{1}{2}$$

quindi l'area cercata vale $(\pi-3)/6$.

Esercizio 1. Se $z \in \mathbb{C}$ e $w = \mathrm{i}\bar{z}$ allora certamente

(A) $\Re(z+w) = \Im(z+w)$.

(B) $\Re(z+w) = 2\mathbb{R}z$.

(C) $\Im(z+w) = 2\Im z$.

(D) $z + w = \bar{z} + \bar{w}$.

Esercizio 2. Se $w \in \mathbb{C}$ e $w = \mathrm{i}\bar{w}$ allora certamente

(A) $\Re(z+w) = \Re w + \Im w$.

(B) $\Re(z+w) = 2\mathbb{R}w$.

(C) $\Im(z+w) = 2\Im w$.

(D) $z + w = \bar{z} + \bar{w}$.

Se $z = x + \mathrm{i}y$ allora $w = \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$ e $z + w = (x+y) + \mathrm{i}(x+y)$.

Esercizio 3. La successione $\dfrac{(n^2 + 3\,\mathrm{sen}\,n!)(n^{-2} - \mathrm{sen}\,n^{-2})}{\mathrm{sen}\,\frac{5n+1}{n^5-3n}}$

(A) tende a $1/30$.

(B) non ha limite.

(C) tende a $5/6$.

(D) tende a $+\infty$.

Esercizio 4. La successione $\dfrac{(n^2 + 5\cos n!)(n^{-2} - \mathrm{sen}\,n^{-2})}{\mathrm{sen}\,\frac{7n+1}{n^5-5n}}$

(A) tende a $1/42$.

(B) non ha limite.

(C) tende a $7/6$.

(D) tende a $+\infty$.

La frazione al denominatore (argomento del seno) si comporta come $5n/n^5 = 5/n^4$, pertanto tende a zero. Allora dato che $\mathrm{sen}\,x \sim x$ per $x \to 0$ anche il denominatore si comporta come $5/n^4$. Dei termini al numeratore il primo si comporta come n^2 dato che il seno è limitato, mentre per il secondo fattore possiamo ricorrere allo sviluppo $\mathrm{sen}\,x = x - (x^3/6) + o(x^3)$ ottenendo

$$\mathrm{sen}\,n^{-2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o(n^{-6}) \quad \Rightarrow \quad n^{-2} - \mathrm{sen}\,n^{-2} = \frac{1}{6n^6} + o(n^{-6}).$$

Allora

$$\frac{(n^2 + 3\,\mathrm{sen}\,n!)(n^{-2} - \mathrm{sen}\,n^{-2})}{\mathrm{sen}\,\frac{5n+1}{n^5-3n}} \sim \frac{n^2 \cdot (1/6n^6)}{5/n^4} = \frac{\frac{1}{6n^4}}{\frac{5}{n^4}} = \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Esercizio 5. Sia $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x^2 - 3x - 18} \le \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \,\}$. Allora:

(A) $[-4, -2] \subset S$.

(B) $[2, 4] \subset S$.

(C) $[-2, 3] \subset S$.

(D) S è un intervallo.

Esercizio 6. Sia $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x^2 + 3x - 18} \le \sqrt{2x^2 + 2x + 2} \,\}$. Allora:

(A) $[-5,-3] \subset S$.	(C) $[-3,2] \subset S$.
(B) $[3,5] \subset S$.	(D) S è un intervallo.

Gli argomenti delle radici devono essere non negativi; inoltre la radice è (nel suo dominio) una funzione strettamente crescente, per cui

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq a \leq b \,,$$

dunque la disequazione proposta equivale a

$$\begin{aligned} 0 \leq 3x^2 - 3x - 18 \leq 2x^2 - 2x + 2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \leq 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq -2 \ \textbf{o} \ x \geq 3 \\ -4 \leq x \leq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

e dunque le soluzioni sono $[-4,-2] \cup [3,5]$.

Esercizio 7. Il limite per $x \to -\infty$ della funzione $2x + \sqrt{4x^2 - 9x}$ vale

(A) $9/4$.	(C) $+\infty$.
(B) $-9/4$.	(D) $-\infty$.

Esercizio 8. Il limite per $x \to -\infty$ della funzione $3x + \sqrt{9x^2 - 4x}$ vale

(A) $2/3$.	(C) $+\infty$.
(B) $-2/3$.	(D) $-\infty$.

Il primo addendo tende a $-\infty$ e il secondo a $+\infty$; dato che $x \to -\infty$ possiamo limitarci a lavorare con $x < 0$. Se moltiplichiamo e dividiamo per $2x - \sqrt{4x^2 - 9x}$, che è somma di numeri positivi, otteniamo

$$2x + \sqrt{4x^2 - 9x} = \frac{\left(2x + \sqrt{4x^2 - 9x}\,\right)\left(2x - \sqrt{4x^2 - 9x}\right)}{2x - \sqrt{4x^2 - 9x}} = \frac{4x^2 - 4x^2 + 9x}{2x - \sqrt{4x^2 - 9x}} \,.$$

Allora il limite da calcolare è pari a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{2x - \sqrt{4x^2 - 9x}} \,.$$

Ma per $x \leq 0$

$$\sqrt{4x^2 - 9x} = \sqrt{x^2(4 - 9/x)} = \sqrt{x^2}\sqrt{4 - 9/x} = |x|\sqrt{4 - 9/x} = -x\sqrt{4 - 9/x}$$

per cui

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - 9x}\,\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{2x + x\sqrt{4 - 9/x}} = \frac{9}{2 + \sqrt{2}} = \frac{9}{4} \,.$$

Esercizio 9. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$. Allora:

(A) $\sup f = \sqrt{2}/4$.

(B) f è monotona.

(C) f è convessa.

(D) f non è limitata inferiormente.

Esercizio 10. Sia $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$. Allora:

(A) $\sup f = 1/4$.

(B) f è monotona.

(C) f è convessa.

(D) f non è limitata superiormente.

La funzione è continua su un intervallo chiuso e limitato, quindi è limitata per il Teorema di Weierstraß; calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$$

e vediamo che f ha massimo per $x = \sqrt{2}$ dove vale $\sqrt{2}/4$, non è monotona dato che cresce fino al punto di massimo e poi decresce. È inutile calcolare la derivata seconda, visto che abbiamo già trovato la risposta giusta.

Esercizio 11. Sia $\alpha > 0$ e sia I l' integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{\arctan(x^{2\alpha})(1+x^{\alpha+1})}\,dx$.

(A) se $0 < \alpha < 1$ allora I converge.

(B) se $1 < \alpha < 2$ allora I converge.

(C) se $\alpha > 3/2$ allora I converge.

(D) I non converge per alcun $\alpha > 0$

Esercizio 12. Sia $\alpha > 0$ e sia I l' integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\arctan(x^{\alpha})(1+x^{2\alpha})}\,dx$.

(A) se $1 < \alpha < 2$ allora I converge.

(B) se $0 < \alpha < 1$ allora I converge.

(C) se $\alpha > 2$ allora I converge.

(D) I non converge per alcun $\alpha > 0$

La funzione integranda è positiva, quindi potremo usare il criterio del confronto asintotico. Il numeratore si comporta come 1 per $x \to +\infty$ e, dato che $\mathrm{e}^t = 1 + t + o(t)$, come x^2 per $x \to 0$. Tenuto conto che $\alpha > 0$, il denominatore si comporta come $(\pi/2)x^{\alpha+1}$ per $x \to +\infty$ e come $x^{2\alpha} \cdot 1$ per $x \to 0$, per cui in definitiva

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{per } x \to +\infty\ , \qquad f(x) \sim \frac{x^2}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha-2}} \quad \text{per } x \to 0\ .$$

Perché l' integrale converga, per il criterio del confronto asintotico occorre che $\alpha + 1 > 1$ e $2\alpha - 2 < 1$, ossia che $0 < \alpha < 3/2$.

Esercizio 13. Un ladro trova un mazzo di 10 chiavi tutte diverse, fra le quali c'è quella di un appartamento che vuole svaligiare. Le prova una dopo l'altra, scartando man mano quelle che non funzionano. Qual è la probabilità che apra la porta esattamente al settimo tentativo?

(A) $1/10$.	(C) $\binom{10}{3}/\binom{10}{7}$.
(B) $(1/10)\cdot(9/10)^6$.	(D) $3/10$.

Esercizio 14. Un ladro trova un mazzo di 10 chiavi tutte diverse, fra le quali c'è quella di un appartamento che vuole svaligiare. Le prova una dopo l'altra, scartando man mano quelle che non funzionano. Qual è la probabilità che apra la porta esattamente al sesto tentativo?

(A) $1/10$.	(C) $\binom{10}{4}/\binom{10}{6}$.
(B) $(1/10)\cdot(9/10)^5$.	(D) $4/10$.

I casi possibili sono i modi di mettere in ordine le 10 chiavi, che sono $10!$. Di questi i casi favorevoli sono quelli che hanno la chiave giusta al settimo posto, e le altre 9 disposte a caso (dopo aver messo a caso le 9 sbagliate, metteremo quella giusta al posto 7), che sono $9!$, quindi la probabilità è $9!/10! = 1/10$.

In alternativa, per fare centro al settimo tentativo dobbiamo aver sbagliato il primo (probabilità $9/10$), poi aver sbagliato anche il secondo (probabilità $8/9$ dato che ora sono rimaste 9 chiavi) eccetera, e finalmente, quando erano rimaste solo quattro chiavi, azzeccare quella giusta (probabilità $1/4$), quindi la probabilità è

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}\,.$$