Risoluzione del compito n. 1 (Giugno 2015/1)

PROBLEMA 1

Se $f(x,y) = 2xy$, l' integrale di f sul triangolo $T = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ vale (cerchiate la risposta corretta)

$$\mathbf{1/4\ , \qquad 1/2\ , \qquad 1\ , \qquad 2\ .}$$

Il triangolo è normale rispetto a entrambi gli assi e possiamo scrivere per il teorema di riduzione

$$\int_T 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^x 2xy\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 [xy^2]_0^x\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}\ .$$

PROBLEMA 2

Se $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ l' integrale su D di $xy/\sqrt{x^2+y^2}$ è (cerchiate la risposta corretta)

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^2 r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,dr\,d\theta\ , \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,dr\,d\theta\ ,$$

$$\int_{\pi/4}^{2\pi/4} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,dr\,d\theta\ .$$

Lo Jacobiano della trasformazione in coordinate polari nel piano è r, e l' insieme D è l' immagine tramite le coordinate polari del rettangolo $0 \leq r \leq 2,\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$, perciò la scrittura corretta è

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int_0^2 \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{r} \cdot r\,dr \Big)\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int_0^2 r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,dr \Big)\,d\theta\ ,$$

che è l'ultima proposta.

PROBLEMA 3

Se $f(x,y,z) = 3zx \operatorname{sen} y - xy \cos z$, il valore di f in $(1,\pi,\pi/2)$ è ...., il gradiente di f in $(1,\pi,\pi/2)$ è ...., la derivata seconda $\partial_z(\partial_x f)$ in $(1,\pi,\pi/2)$ è ....

Abbiamo

$$f(1,\pi,\pi/2) = 3\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\pi - \pi \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\nabla f = (3z \operatorname{sen} y - y\cos z,\ 3zx\cos y - x\cos z,\ 3x \operatorname{sen} y + xy \operatorname{sen} z)$$

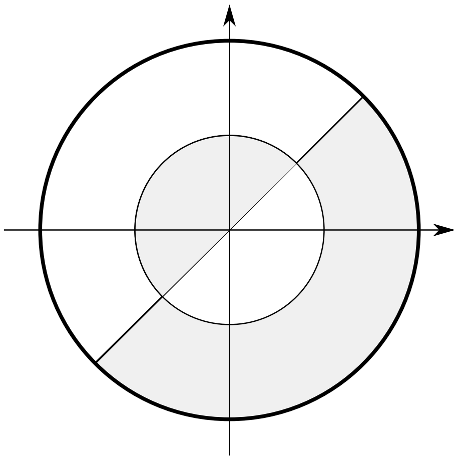
$$\Rightarrow \nabla f(1,\pi,\pi/2) = (0, -3\pi/2, \pi)$$

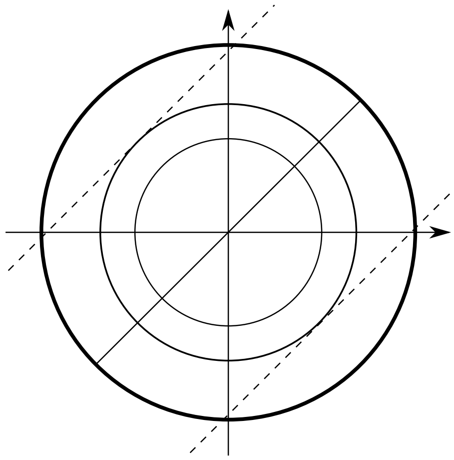
$$\partial_z(\partial_x f) = 3 \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} z \Rightarrow \big(\partial_z(\partial_x f)\big)(1,\pi,\pi/2) = \pi\ .$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione $f(x,y) = (x^2 - 1 + y^2)(x - y)$ e l'insieme $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
a) Dite perché f ha massimo e minimo su B .
b) Studiate il segno di f e determinate massimo e minimo di f su B .

La funzione f è continua, e B è chiuso e limitato quindi compatto, perciò il Teorema di Weierstraß assicura che esistono massimo e minimo. La funzione f è il prodotto di due fattori, perciò il segno è detrminato dal segno dei fattori x^2+y^2-1 (che è positivo fuori dal cerchio unitario) e $x-y$ (che è positivo al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante). In grigio le zone dove $f>0$.





Studiamo f su una circonferenza $C_k = \{x^2 + y^2 = k\}$ con $0 < k \leq 2$: lì abbiamo

$$f(x,y) = (k-1)(x-y) .$$

Le curve di livello della funzione $x-y$ sono rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e i punti della circonferenza C_k che appartengono alla curva di livello più alto o più basso sono quelli di tangenza in figura, in cui la circonferenza incrocia la retta $y=-x$ (il valore massimo è nel punto di tangenza in basso se $k>1$, in quello in alto se $k<1$). Allora per determinare il massimo e il minimo di f ci basta studiarla sulla retta $y=-x$, ovvero studiare

$$g(x) = (2x^2 - 1) \cdot 2x = 4x^3 - 2x , \qquad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} .$$

Lo studio è molto facile, $g'(x) = 12x^2 - 2 = 12(x^2 - 1/6)$ si annulla per $x = \pm 1/\sqrt{6}$ e g è crescente in $[-\sqrt{2}, -1/\sqrt{6}]$, decrescente in $[-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]$, crescente in $[1/\sqrt{6}, \sqrt{2}]$. Dato che g è dispari,

$$g(1/\sqrt{6}\,) = -\frac{4}{3\sqrt{6}} , \quad g(\sqrt{2}\,) = 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad g(-1/\sqrt{6}\,) = \frac{4}{3\sqrt{6}} , \quad g(-\sqrt{2}\,) = -6\sqrt{2}$$

e i valori minimo e massimo cercati sono $\pm 6\sqrt{2}$. Naturalmente si può lavorare anche trovando gli zeri del gradiente, che sono i punti

$$\pm\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\,, \qquad \pm\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)\ :$$

i primi due sono selle, gli altri due massimo e minimo locale. Poi si studia (facilissimo) f sulla circonferenza esterna, e si trovano i due punti (che sono quelli di minimo e massimo assoluti) $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

PROBLEMA 5

Considerate il problema di Cauchy $\begin{cases} \boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = } \, e^{x} \\ \boldsymbol{y(0) = y'(0) = 1} \; . \end{cases}$

a) **Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.**
b) **Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.**
c) **Determinate la soluzione del problema di Cauchy.**

L'equazione caratteristica $z^2 + 4z + 4 = 0$ ha come radice doppia $z = -2$, quindi le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = e^{-2x} , \qquad y_2(x) = x\, e^{-2x}$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_O(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2 x\, e^{-2x} \; .$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = c\, e^x$: deve essere $9c\, e^x = e^x$ quindi $c = 1/9$. Allora la soluzione generale dell'equazione proposta è

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_O(x) = \frac{1}{9}\, e^x + c_1\, e^{-2x} + c_2 x\, e^{-2x} \; .$$

Abbiamo

$$y(0) = \frac{1}{9} + c_1 \; , \qquad y'(x) = \frac{1}{9}\, e^x - 2c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{-2x} - 2c_2 x\, e^{-2x} \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{9} - 2c_1 + c_2 \; ,$$

quindi per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo determinare c_1, c_2 in modo che

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + c_1 = 1 \\ \frac{1}{9} - 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = \frac{8}{9} \; , \quad c_2 = \frac{8}{3}$$

e infine la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{9}\, e^x + \frac{8}{9}\, e^{-2x} + \frac{8}{3} x\, e^{-2x} \; .$$

PROBLEMA 6

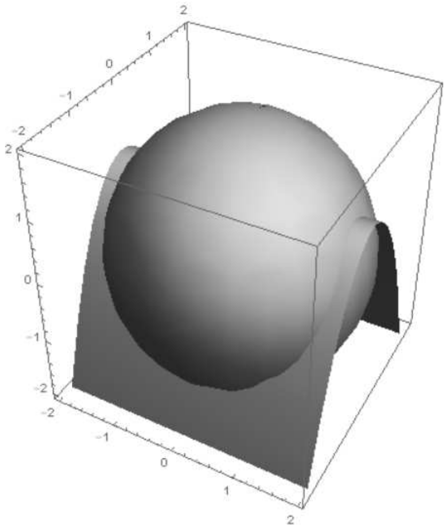
Disegnate l' insieme $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + z - 1 = 0\}$.

a) **Scrivete l'equazione cartesiana della proiezione P di E sul piano (x, y) .**

b) **Dimostrate che in E esistono i punti di massima e di minima distanza da $A = (0, 0, 2)$ e determinateli.**

c) **(facoltativo) Provate che sia P sia E sono curve lisce.**

È l' intersezione della superficie di una sfera con un paraboloide di trascinamento (o cilindro parabolico) che ha come asse l'asse y e la cui sezione col piano (x, z) è la parabola di equazione $z = 1 - x^2$.



Per determinare l'equazione della proiezione osserviamo che

$$(x, y, z) \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} z = 1 - x^2 \\ x^2 + y^2 + (1 - x^2)^2 = 4 \end{cases} :$$

dunque per ogni soluzione (x, y) della seconda equazione la prima ci dà un valore di z per cui $(x, y, z) \in E$. Allora la proiezione P ha equazione

$$x^2 + y^2 + (1 - x^2)^2 = 4 \; .$$

L' insieme E è intersezione di due luoghi di zeri di funzioni continue: questi sono chiusi, quindi E è chiuso; è anche limitato perché fa parte della sfera di raggio 2 ; la funzione distanza da un punto è continua, perciò il massimo e il minimo esistono per il teorema di Weierstraß. Per calcolarli usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: posto

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 2)^2$$

(il quadrato della distanza da A) dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ 2x = 2\lambda x + 2\mu x \\ 2y = 2\mu y \\ 2(z-2) = \lambda + 2\mu z \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ (\lambda + \mu - 1)x = 0 \\ (\mu - 1)y = 0 \\ 2(1-\mu)z = \lambda + 4\ . \end{cases}$$

Dalla quarta equazione ricaviamo $\mu = 1$ oppure $y = 0$. Vediamo che se supponiamo $\mu = 1$ ricaviamo $\lambda = -4$ dall'ultima e $x = 0$ dalla terza: i punti di E con $x = 0$ verificano $z = 1$ e quindi $y = \pm\sqrt{3}$, e abbiamo trovato che due punti stazionari sono $(0, \pm\sqrt{3}, 1)$ per i quali

$$f(0, \pm\sqrt{3}, 1) = 4\ .$$

Se invece supponiamo $y = 0$ dalle prime due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} x^2 = 1 - z \\ 1 - z + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 - z \\ z^2 - z - 3 = 0\ . \end{cases}$$

La seconda equazione dà $z = (1 \pm \sqrt{13})/2$ da cui (dei due valori di x^2 uno solo è accettabile, quello corrispondente a $z = (1 - \sqrt{13})/2$)

$$x^2 = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\ .$$

Abbiamo trovato altri due punti stazionari,

$$\Big(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, 0, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\Big)$$

(a dire il vero dovremmo controllare che con questi valori di (x, y, z) si possano trovare (μ, λ) che risolvono il sistema di Lagrange, ma questo è facile). Abbiamo

$$f\Big(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, 0, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\Big) = \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \Big(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\Big)^2 = 6 + 2\sqrt{13}\ .$$

È chiaro che questo valore è superiore a 4, quindi la minima distanza è 2, realizzata in $(0, \pm\sqrt{3}, 1)$, mentre la massima distanza $\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$ è realizzata negli altri due punti stazionari.
Per provare che P è liscia osserviamo che

$$P = \{(x, y) : x^2 + y^2 + (1 - x^2)^2 - 4 = 0\}$$

e che il gradiente della funzione $x^2 + y^2 + (1 - x^2)^2 - 4$ è

$$(4x(x^2 - 1), 2y)\ :$$

questo si annulla solo nei punti $(0,0)$ e $(\pm 1,0)$, che non appartengono a P, dunque in tutti i punti di P si può applicare il teorema del Dini. Per vedere che E è una curva liscia possiamo fare lo stesso, o anche notare che visto che P è liscia è l'immagine (almeno localmente) di una curva regolare $\big(\phi_1(t), \phi_2(t)\big)$, ma allora E è l'immagine della curva (anch'essa regolare)

$$\big(\phi_1(t), \phi_2(t), 1 - \phi_1^2(t)\big) .$$

Tutto sommato la strada standard è più conveniente: la matrice che ha come righe i gradienti di $x^2 + z - 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 4$ è

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

e i suoi minori 2×2 si annullano solo se

$$\begin{cases} 4xy = 0 \\ 2x(2z-1) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \ \textbf{o} \ z = 1/2 \end{cases}$$

ma i punti che verificano queste condizioni non appartengono ad E (non è istantaneo, ci vuole qualche conto: se $y = x = 0$ da $z = 1 - x^2$ avremmo $z = 1$ ma $(0,0,1)$ non sta sulla sfera, l'altro è simile).

Risoluzione del compito n. 2 (Giugno 2015/2)

PROBLEMA 1

Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ **vale (cerchiare la risposta corretta)**

$$\mathbf{0}\ , \qquad \mathbf{1}\ , \qquad \textbf{non esiste}\ , \qquad +\infty\ .$$

A parte l'origine, dove non è definita, sull'asse delle ascisse la funzione vale identicamente 1 , e su quello delle ordinate identicamente -1 , quindi il limite non esiste.

PROBLEMA 2

I punti stazionari della funzione $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-3z)^2$ **sono (cerchiare la risposta corretta)**

nessuno , uno , due , infiniti .

La funzione è non negativa, inoltre nei punti dove

$$x = y = 3z\ ,$$

che sono una retta, quella passante per $(0,0,0)$ e $(3,3,1)$, la funzione vale zero. Questi sono punti di minimo assoluto interno, quindi per forza lì il gradiente di f deve annullarsi, dunque si tratta di infiniti punti (ma basta scrivere $\nabla f = \mathbf{0}$ per ottenere infinite soluzioni).

PROBLEMA 3

La funzione $y(x) = 2\operatorname{sen} x - 3\cos x$ **risolve l'equazione differenziale (cerchiare la risposta corretta)**

$$3y'' + 2y' = 13\cos x\ , \qquad y' = 2y\operatorname{sen} x - \cos x\ , \qquad y'' - y = 0\ .$$

Le soluzioni dell'equazione $y'' = y$ sono quelle del tipo $c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$, quindi la terza risposte è esclusa. Inserendo $y(x)$ nella seconda espressione compaiono a secondo membro (ma non al primo) dei termini in $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen} x\cos x$, quindi anche la seconda risposta è errata, mentre in effetti

$$[y' = 2\cos x + 3\operatorname{sen} x\ , \quad y'' = -2\operatorname{sen} x + 3\cos x] \quad\Rightarrow\quad 3y'' + 2y' = 13\cos x\ ,$$

e la prima risposta è corretta.

PROBLEMA 4

Considerate la curva $\phi(t) = (t\cos t,\ t\,\mathrm{sen}\, t,\ t)$ definita per $0 \le t \le 2\pi$.

a) **Il sostegno di ϕ sta sulla superficie di un cono: scrivetene l'equazione e disegnatelo. Disegnate il sostegno di ϕ .**

b) **Individuate il punto $A = \phi(\pi/2)$, dopo averne scritto le coordinate. Per il passaggio dal punto A , scrivete la velocità di ϕ , la velocità scalare, l'accelerazione e l'equazione della retta tangente.**

c) **Determinate l' integrale su ϕ della funzione $f(x, y, z) = z$.**

Abbiamo subito $x^2 + y^2 = t^2\cos^2 t + t^2\,\mathrm{sen}^2\, t = t^2 = z^2$, quindi il sostegno di $\boldsymbol{\phi}$ (dato che $z \ge 0$) sta tutto sul cono di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

il cono circolare retto di vertice l'origine, asse l'asse z e apertura $\pi/4$. Abbiamo

$$\boldsymbol{A} = (0, \pi/2, \pi/2)\ .$$

Dato che

$$\boldsymbol{\phi}'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t + t\cos t, 1)\ , \qquad \boldsymbol{\phi}''(t) = (-2\,\mathrm{sen}\, t - t\cos t, 2\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t, 0)$$

abbiamo in $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\phi}'(\pi/2) = (-\pi/2, 1, 1)\ , \qquad v_{\boldsymbol{\phi}}(\pi/2) = \sqrt{2 + \pi^2/4}\ , \qquad \boldsymbol{\phi}''(\pi/2) = (-2, -\pi/2, 0)$$

e la retta tangente ha equazione parametrica

$$\boldsymbol{X} = (0, \pi/2, \pi/2) + t(-\pi/2, 1, 1)\ .$$

Dato che

$$\|\boldsymbol{\phi}'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$$

l' integrale cercato è

$$\int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt = \Big[\frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{(2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}}{3}\ .$$

PROBLEMA 5

Siano

$$\boldsymbol{E = \{(x,y) : y \geq x\ ,\ \ y \leq -x\ ,\ \ x^2 + y^2 \leq 4\}}$$
$$\boldsymbol{F = \{(x,y) : y \geq x\ ,\ \ y \leq -x\ ,\ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}\ .}$$

a) Calcolate $\displaystyle\int_F \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ **.**

b) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ **risulta convergente l'integrale**

$$\int_E \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy\ .$$

In coordinate polari l'insieme F corrisponde al rettangolo $[1,2] \times [3\pi/4, 5\pi/4]$, perciò ricordando che in due dimensioni lo jacobiano della trasformazione in coordinate polari vale r

$$\begin{aligned}
\int_F \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \Big(\int_1^2 \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\, r\,dr\Big)\,d\theta \\
&= \Big(\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_1^2 r^2\,dr\Big) \\
&= \Big[\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\Big]_{3\pi/4}^{5\pi/4}\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{-2/2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{7}{3} = -\frac{7}{9\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'altro integrale, osserviamo che si tratta di una funzione negativa nel dominio di integrazione, quindi possiamo invadere E con una successione scelta come meglio crediamo, in particolare conviene farlo con gli insiemi

$$E_\varepsilon = \{(x,y) \in E : x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\}$$

che in coordinate polari corrispondono a dei rettangoli $[\varepsilon, 2] \times [3\pi/4, 5\pi/4]$: allora come prima

$$\begin{aligned}
\int_{E_\varepsilon} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy &= \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \Big(\int_\varepsilon^2 \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^{2\alpha}}\, r\,dr\Big)\,d\theta \\
&= \frac{-2/2\sqrt{2}}{3}\int_\varepsilon^2 r^{4-2\alpha}\,dr = \frac{-2/2\sqrt{2}}{3}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{2\alpha-4}}\,dr\ .
\end{aligned}$$

Sappiamo che per $2\alpha - 4 \geq 1$ il limite per $\varepsilon \to 0$ dell'ultimo integrale vale $+\infty$, mentre il limite è finito per $2\alpha - 4 < 1$ ossia $\alpha < 5/2$, e in quel caso

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 r^{4-2\alpha}\,dr = \frac{2^{5-2\alpha}}{5-2\alpha}$$

per cui

$$\int_E \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_\varepsilon} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha \geq 5/2 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{2^{5-2\alpha}}{5-2\alpha} & \text{se } \alpha < 5/2. \end{cases}$$

PROBLEMA 6

Considerate la funzione $f(x,y) = (x+2y)^2 + 3x^2$ e gli insiemi

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\} , \qquad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4\} .$$

a) **Descrivete gli insiemi B e C e disegnateli.**
b) **Individuate i punti stazionari di f; determinate il massimo e il minimo di f su B.**
c) **Scrivete l'equazione del piano tangente P al grafico di f nel punto $(1,1,12)$.**
d) **Dando per buono il punto seguente, calcolate il volume della parte di C che sta al di sopra di P e sotto al grafico di f.**
e) **Provate che il grafico di f sta sempre al di sopra del piano tangente P.**

L'insieme piano B è un cerchio, centrato nell'origine e di raggio 1, mentre l'insieme tridimensionale C è un cilindro (pieno) di base B nel piano $z = 0$ e asse l'asse z.
Per trovare i punti stazionari di f risolviamo

$$\nabla f = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0) ,$$

dunque l'unico punto stazionario di f è l'origine; si tratta di un minimo assoluto, visto che lì f si annulla ed f è una somma di quadrati che si annullano contemporaneamente solo in quel punto. Osserviamo (ci sarà utile poi, anche se non indispensabile) che

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 = 2\big(x^2 + y^2 + (x+y)^2\big) . \tag{1}$$

Visto che $(0,0) \in B$ abbiamo già trovato il minimo. Non vi sono altri punti stazionari, quindi studiamo f sul bordo di B, che è una circonferenza. Vista la situazione, il modo più pratico è parametrizzarla con

$$x = 2\cos t , \quad y = 2 \operatorname{sen} t$$

e studiare su $[0, 2\pi]$ la funzione

$$g(t) = 8 + 8(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 .$$

Si verifica subito che $g'(t) = 0$ se e solo se $\cos t = \operatorname{sen} t = \pm\sqrt{2}/2$ (dove g vale 24) oppure se $\cos t = -\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{2}/2$ (dove g vale 8). Dunque il massimo e minimo su B cercati valgono rispettivamente 24 e 0. Usando l'espressione (1) la cosa era ancora più facile, visto che su B la funzione f coincide con $8 + 2(x+y)^2$ le cui linee di livello sono ben note.
Dato che $\nabla f(1,1) = (12,12)$ l'equazione del piano tangente è

$$\begin{aligned} z = f(x_0,y_0) + \big(\nabla f(x_0,y_0)\big) \cdot (x - x_0, y - y_0) &\iff z = 12 + (12,12) \cdot (x-1, y-1) \\ &\iff z = 12x + 12y - 12 . \end{aligned}$$

Visto che (come dal prossimo punto) la sezione del solido in corrispondenza di ogni punto di B è il segmento che inizia alla quota di intersezione con P e finisce a quella di intersezione col grafico, il volume da calcolare è, integrando per fili sulla base B ,

$$\int_B \Big(\int_{12x+12y-12}^{(x+2y)^2+3x^2} 1\, dz \Big) dx\, dy = \int_B (4x^2 + 4y^2 + 4xy - 12x - 12y + 12)\, dx\, dy \ .$$

Lo scopriremmo comunque, ma osserviamo che l' integrale sul cerchio B della funzione x , che è dispari rispetto a un diametro di B , vale zero, e lo stesso quello di y (e non scordiamo che quello di 12 vale $12 \cdot 4\pi$); sul semicerchio $B \cap \{y \geq 0\}$ la funzione xy è simmetrica rispetto all'asse y , quindi su quel semicerchio (e anche su quello inferiore) l' integrale di xy vale zero. In conclusione l' integrale si riduce a $\int_B 4(x^2+y^2)\, dx\, dy + 48\pi$, che in coordinate polari dà il volume cercato

$$48\pi + 2\pi \int_0^2 4r^2 \cdot r\, dr = 48\pi + 2\pi \big[r^4 \big]_0^2 = 48\pi + 32\pi = 80\pi \ .$$

Veniamo all'ultimo punto: dobbiamo provare che

$$f(x,y) \geq 12x + 12y - 12 \ .$$

Questo equivale a (dividiamo tutto per 2, dopo vedrete perché è meglio non dividere ora per 4)

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 6 \geq 0 \ ;$$

traslando le coordinate in modo che la nuova origine sia in $(1,1)$, cioè ponendo $X = x-1$ e $Y = y-1$, abbiamo

$$2X^2 + 4X + 2 + 2XY + 2X + 2Y + 2 + 2Y^2 + 4Y + 2 - 6X - 6 - 6Y - 6 + 6 \geq 0$$

cioè

$$X^2 + Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2 \geq 0 \iff X^2 + Y^2 + (X+Y)^2 \geq 0 \ ,$$

che è vero. Altro modo: la funzione

$$g(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 6$$

tende a $+\infty$ per $\|(x,y)\| \to +\infty$, dato che

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)^2 - 6(x+y) + 6 = x^2 + y^2 + (x+y-3)^2 - 3 \geq x^2 + y^2 - 3 \ ,$$

pertanto deve avere minimo su $\mathbb{R}^2$, ma il suo gradiente si annulla solo in $(1,1)$ dove g vale zero, dunque $g \geq 0$. Altro modo: leggendo g su ogni retta per $(1,1)$ otteniamo una funzione convessa che ha minimo quando passa per $(1,1)$, dove vale zero. Altro modo se si sono viste le funzioni convesse: la funzione g ha matrice hessiana definita positiva (determinante e traccia positivi), quindi è una funzione convessa e ha minimo nell'unico punto dove il gradiente si annulla.

Risoluzione del compito n. 3 (Luglio 2015)

PROBLEMA 1

Il massimo della funzione $f(x,y) = x - 3y$ sul rettangolo $[-1,2] \times [3,5]$ è (cerchiare la risposta corretta)

17 , -10 , -7 , 7 .

Le linee di livello di f sono rette, precisamente

$$f(x,y) = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{x}{3} - \frac{k}{3} \ :$$

sono tutte parallele, con coefficiente angolare $1/3$ (ci interessa solo che è positivo) e si abbassano all'aumentare del livello k. Allora è sufficiente individuare la retta più bassa che interseca il rettangolo: questa lo tocca nel solo angolo inferiore destro, $(2,3)$, quindi

$$\max f = f(2,3) = 2 - 9 = -7 \ .$$

PROBLEMA 2

Il lavoro del campo $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2} \ , \ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ sulla circonferenza unitaria percorsa una volta in verso antiorario è (cerchiare la risposta corretta)

2π , $(-1,1)$, (π,π) , 0 .

La circonferenza è parametrizzata da

$$\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \ , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ed essendo $x^2 + y^2 = 1$ il lavoro è dato da

$$\int_0^{2\pi} F\big(\phi(t)\big) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \ .$$

PROBLEMA 3

Le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = 2y$ che verificano tutte e tre le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ sono (cerchiare la risposta corretta)

una **,** nessuna **,** tre **,** infinite **.**

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione, dunque basta controllare se questa verifica anche la condizione $y''(0) = 3$, e allora la risposta sarà “una”, o non la verifica, e allora la risposta sarà “nessuna”. Ma $y'' = 2y$ vuol dire che per ogni x è $y''(x) = 2y(x)$, e in particolare $y''(0) = 2y(0) = 2$. Allora nessuna soluzione dell'equazione differenziale può verificare tutte e tre le condizioni.

PROBLEMA 4

Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\boldsymbol{y'' + 2y' + 5y = 17\,\mathrm{sen}(2x)\ , \qquad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 2\ .}$$

Iniziamo risolvendo l'equazione omogenea associata $y'' + 2y' + 5y = 0$, la cui equazione caratteristica è $z^2 + 2z + 5 = 0$ che ha soluzioni

$$z = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2\mathrm{i}\ .$$

Allora due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea sono

$$\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\ , \qquad \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)\ .$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare $\bar{y}$ della forma

$$\bar{y}(x) = A\,\mathrm{sen}(2x) + B\cos(2x) \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\,\mathrm{sen}(2x) \\ \bar{y}''(x) = -4A\,\mathrm{sen}(2x) - 4B\cos(2x)\ . \end{cases}$$

Abbiamo

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + 5\bar{y} = (A - 4B)\,\mathrm{sen}(2x) + (B + 4A)\cos(2x)$$

e se vogliamo che $\bar{y}'' + 2\bar{y}' + 5\bar{y} = 17\,\mathrm{sen}\,2x$ occorre che

$$\begin{cases} B + 4A = 0 \\ A - 4B = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -4A \\ 17A = 17 \end{cases} \iff A = 1\ ,\ B = -4\ :$$

allora $\bar{y}(x) = \mathrm{sen}(2x) - 4\cos(2x)$ e la soluzione generale dell'equazione differenziale completa è

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x) + \mathrm{sen}(2x) - 4\cos(2x)\ .$$

Abbiamo $y(0) = c_1 - 4$ ed essendo $y'(x)$ uguale a

$$-c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) - 2c_1\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x) - c_2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + 2\cos(2x) + 8\,\mathrm{sen}(2x)$$

è $y'(0) = -c_1 + 2c_2 + 2$, dunque le condizioni iniziali danno il sistema

$$\begin{cases} c_1 - 4 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 4 \\ -4 + 2c_2 = 0 \end{cases} \iff c_1 = 4\ ,\ c_2 = 2$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(2x) + \mathrm{sen}(2x) - 4\cos(2x)\ .$$

PROBLEMA 5

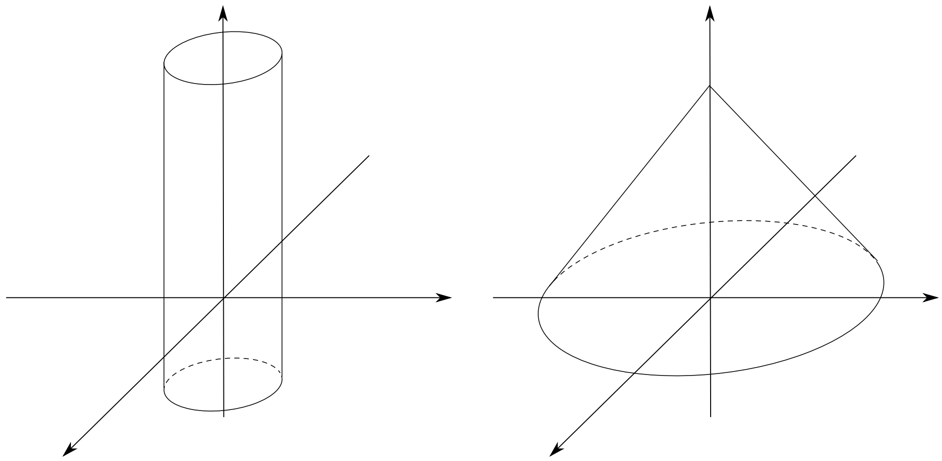
Siano

$$\boldsymbol{E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\}}$$
$$\boldsymbol{F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}} \ .$$

a) **Descrivete $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{F}$, disegnateli, descrivete e disegnate la differenza $\boldsymbol{\Omega = F \setminus E}$.**

b) **Calcolate $\displaystyle\int_\Omega \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy\, dz$.**

L' insieme E è il cilindro pieno con asse l'asse z e sezione sul piano (x, y) uguale al cerchio unitario. Invece l' insieme F è un cono pieno, che ha asse l'asse z, vertice in $(0, 0, 3)$ e base sul piano $z = 0$ il cerchio centrato nell'origine e di raggio 3 .



L'apertura di questo cono è $\pi/4$; la superficie laterale di F è esterna al cilindro fino all'altezza $z = 2$, in cui la sezione del cono ha raggio 1 , poi diventa interna al cilindro. Allora la differenza Ω è un tronco di cono forato, di altezza 2 (fra $z = 0$ e $z = 2$) e raggi di base 3 e 1 (l' intera base superiore sparisce dato che il foro cilindrico ha raggio 1).

Per calcolare l' integrale conviene usare le coordinate cilindriche. Inoltre, visto che la funzione è pari sia rispetto a x che rispetto a y , e la figura è simmetrica sia rispetto a x che rispetto a y , possiamo calcolare l' integrale solo su un quarto di Ω , precisamente su

$$\Omega' = \{(x, y, z) \in \Omega : x \ge 0 \ , \ y \ge 0\}$$

il che giova perché permette di eliminare il fastidioso valore assoluto (se non si usa la simmetria occorre spezzare il dominio di integrazione nelle due parti in cui y è positiva e negativa: nulla di male, ma si duplicano i conti, perfettamente identici). Ricordiamo che in tre dimensioni il determinante jacobiano delle coordinate cilindriche è r ; inoltre Ω' è l' immagine tramite le coordinate cilindriche dell' insieme

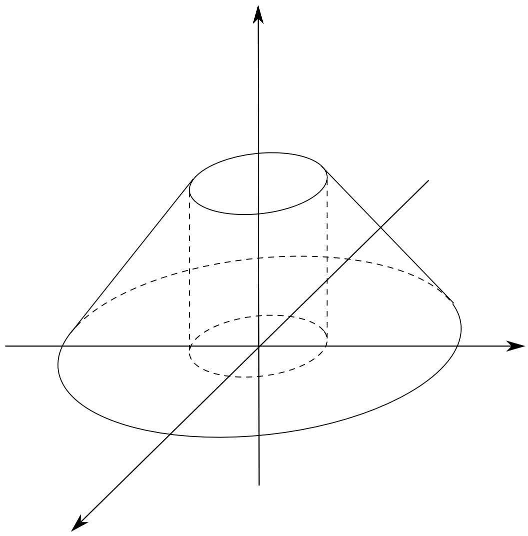
$$\{(\theta, r, z) : 0 \le \theta \le \pi/2 \ , \ 1 \le r \le 3 \ , \ 0 \le z \le 3 - r\} \ ,$$

quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/2} \Big[\int_1^3 \Big(\int_0^{3-r} \frac{1}{r^4}(r^2\cos^2\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot r\,dz\Big)dr\Big]\,d\theta \\
&= \Big(\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_1^3 (3-r)\,dr\Big) \\
&= \Big[-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[3r - \frac{r^2}{2}\Big]_1^3 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\Big) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

per cui

$$\int_{\Omega} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,dz = 4\int_{\Omega'} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{8}{3}\,.$$



PROBLEMA 6

Considerate l' insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge -1\ ,\ y \ge -1\ ,\ x^2 + y^2 \le 4\}$.

a) **Disegnate l' insieme A .**

b) **Dite perché la funzione $f(x, y) = xy\sqrt{3} + x^2$ ha massimo e minimo su A , giustificando accuratamente la risposta.**

c) **Determinate massimo e minimo di f su A .**

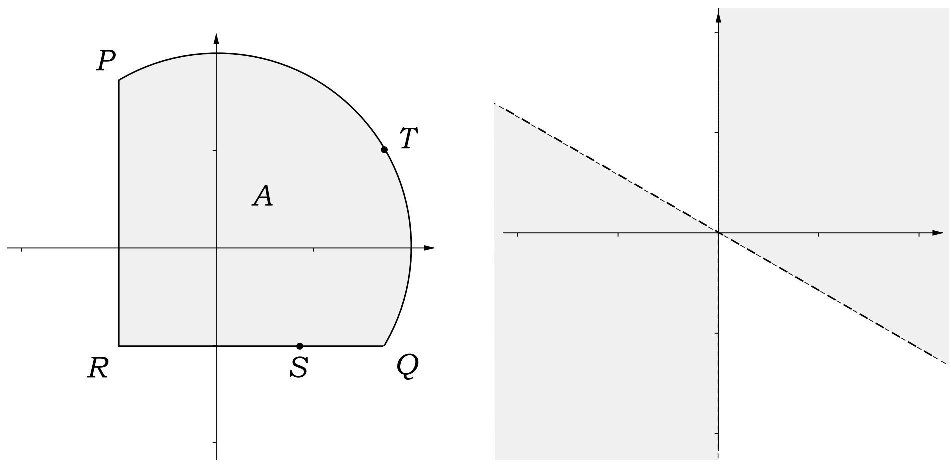
d) **Dite se f ha massimo e minimo su $\mathbb{R}^2$, giustificando accuratamente la risposta.**

L' insieme A (ombreggiato nella figura di sinistra) è la parte del cerchio chiuso centrato nell'origine e di raggio 2 che sta sopra (sarebbe meglio dire "non al di sotto di") la retta di equazione $y = -1$ e a destra (...) della retta di equazione $x = -1$. I punti di intersezione delle due rette con l'arco di circonferenza hanno coordinate $P = (-1, \sqrt{3})$ e $Q = (\sqrt{3}, -1)$, mentre naturalmente le due rette si intersecano in $R = (-1, -1)$. Tanto il cerchio chiuso che i semipiani chiusi $\{x \ge -1\}$ e $\{y \ge -1\}$ sono chiusi, quindi la loro inbtersezione è un chiuso. Inoltre il cerchio è limitato, quindi l' intersezione A risulta anch'essa limitata e quindi compatta. La funzione f è un polinomio, quindi è continua, e per il Teorema di Weierstraß il massimo e il minimo su A esistono. Rispondiamo subito all'ultima domanda: leggiamo f ad esempio sulla retta $x = 1$ e otteniamo la funzione $y\sqrt{3} + 1$, che tende a $\pm\infty$ per $y \to \pm\infty$, quindi $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$, ed f non ha massimo né minimo su $\mathbb{R}^2$.

Dato che non è per nulla difficile, guardiamo il segno di f , per controllo futuro dei risultati che otterremo: è

$$f(x, y) = x\sqrt{3}\Big(y + \frac{x}{\sqrt{3}}\Big) ;$$

la retta di equazione $y = -x/\sqrt{3}$ è inclinata verso il basso di $\pi/6$, ed f è positiva nella zona ombreggiata della figura di destra.



In particolare possiamo prevedere che nell'origine vi sarà una sella. Cerchiamo i punti stazionari di f:

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y\sqrt{3} + 2x = 0 \\ x\sqrt{3} = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y = 0\ ,$$

perciò l'unico punto stazionario di f (che fra l'altro cade dentro A) è l'origine: controlliamo che è proprio di sella con la matrice hessiana

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \nabla^2 f(x,y) \equiv -3 < 0\ .$$

Non vi sono punti di massimo o minimo locale interni, quindi studiamo f sul bordo. Iniziamo con i facili lati rettilinei: sul lato sinistro

$$x = -1\ , \qquad -1 \le y \le \sqrt{3}$$

la funzione da studiare è $g(y) = 1 - y\sqrt{3}$, che ha minimo per $y = \sqrt{3}$ (corrispondente al punto P) e massimo per $y = -1$ (corrispondente ad R), quindi $\min g = -2$ e $\max g = 1 + \sqrt{3}$.
Sul lato inferiore di A abbiamo

$$y = -1\ , \qquad -1 \le x \le \sqrt{3}\ ,$$

la funzione da studuare è $h(x) = x^2 - x\sqrt{3}$ e abbiamo $h'(x) = 2x - \sqrt{3}$: dunque h decresce per $-1 \le x \le \sqrt{3}/2$ e poi cresce, quindi $\min h = h(\sqrt{3}/2) = -3/4$ in corrispondenza del punto $S = (\sqrt{3}/2, -1)$, mentre per trovare il massimo di h dobbiamo confrontare $h(-1) = 1 + \sqrt{3}$, corrispondente al punto R, e $h(\sqrt{3}) = 0$, corrispondente a Q, pertanto $\max h = h(-1) = 1 + \sqrt{3}$.
La parte meno facile è l'arco di circonferenza, e useremo entrambi i metodi studiati. Iniziamo parametrizzandolo con

$$(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)\ , \qquad -\pi/6 \le t \le 2\pi/3$$

(ricordiamo che $1/\sqrt{3}$ è la tangente di $\pi/6$) e studiamo la funzione

$$s(t) = f(2\cos t, 2\operatorname{sen} t) = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} t\cos t + 4\cos^2 t$$

su $[-\pi/6, 2\pi/3]$. Non è difficile, ma se si ha un po' di fantasia

$$s(t) = 2\sqrt{3}\cdot 2\operatorname{sen} t\cos t + 2\cos^2 t + 2(1 - \operatorname{sen}^2 t) = 2 + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(2t) + 2\cos(2t)$$

e addirittura

$$s(t) = 2 + 4\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}(2t) + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos(2t) = 2 + 4\operatorname{sen}\Big(2t + \frac{\pi}{6}\Big)\ .$$

Ora

$$-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{3} \le 2t \le \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} \le 2t + \frac{\pi}{6} \le \frac{3\pi}{2}$$

e a questo punto il minimo di s è realizzato quando $2t + \pi/6$ vale $3\pi/2$ mentre il massimo quando $2t + \pi/6 = \pi/2$. Allora

$$\min s = s(2\pi/3) = f(-1, \sqrt{3}) = -2 \ , \qquad \max s = s(\pi/6) = f(\sqrt{3}, 1) = 6 \ .$$

In conclusione, dato che non vi sono punti stazionari interni e i valori di massimo e minimo sui vari lati di A sono -2 , $-3/4$, 0 , $1+\sqrt{3}$ e 6 , il minimo di f su A è -2 , realizzato in P , e il massimo 6 è realizzato in $T = (\sqrt{3}, 1)$.
Riproviamo a studiare f sull'arco di circonferenza, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \ , \ x \geq -1 \ , \ y \geq -1 \\ y\sqrt{3} + 2x = 2\lambda x \\ x\sqrt{3} = 2\lambda y \ ; \end{cases}$$

se fosse $y = 0$ dall'ultima equazione ricaveremmo anche $x = 0$, ma $(0,0)$ non sta sull'arco. Allora $y \neq 0$ e dall'ultima equazione otteniamo 2λ e lo sostituiamo nella seconda:

$$2\lambda = x\sqrt{3}/y \quad \Rightarrow \quad y\sqrt{3} + 2x = x^2\sqrt{3}/y \quad \Rightarrow \quad y^2\sqrt{3} + 2xy = x^2\sqrt{3} \ .$$

Un piccolo problema è il segno di y : non volendo lasciare l'incertezza $y = \pm\sqrt{4-x^2}$, cominciamo sostituendo y^2 con $4 - x^2$ e otteniamo

$$4\sqrt{3} - 2x^2\sqrt{3} + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = x^2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \ . \tag{1}$$

Teniamo a mente questa uguaglianza, ed ora eleviamo tutto al quadrato, dopo di che potremo sostituire y^2 con $4 - x^2$:

$$\begin{aligned} x^2y^2 = 3(x^2-2)^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2(4-x^2) = 3(x^4 - 4x^2 + 4) \\ &\Rightarrow \quad 4x^4 - 16x^2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \ . \end{aligned}$$

Di questa equazione cerchiamo le soluzioni con $-1 < x \leq 2$, dato che stiamo studiando i punti *interni* all'arco, dove si può applicare il teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Otteniamo

$$x^2 = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = +\sqrt{3} \ \textbf{o} \ x = +1$$

ma dall'uguaglianza (1) nel caso $x = \sqrt{3}$ ricaviamo $y\sqrt{3} = \sqrt{3}$ cioè $y = 1$, e il punto $(\sqrt{3}, 1)$ sta sull'arco che stiamo studiando, mentre per $x = 1$ da (1) si ricava $y = -\sqrt{3}$, un punto quindi da non considerare. Abbiamo perciò anche in questo modo ritrovato il punto $(\sqrt{3}, 1)$, che ci darà il massimo cercato.

Risoluzione del compito n. 4 (Settembre 2015/1)

PROBLEMA 1

Il lavoro compiuto dal campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy\ ,\ x^2 - 2y)$ lungo la curva $(2\cos t\ ,\ 2\,\mathrm{sen}\,t)$ con $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ vale (cerchiare la risposta corretta)

$$\mathbf{(0,0)\ ,\qquad 40/3\ ,\qquad 2\pi\ ,\qquad 0\ .}$$

Se $\boldsymbol{\phi}(t) = (2\cos t\ ,\ 2\,\mathrm{sen}\,t)$ allora $\boldsymbol{\phi}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t\ ,\ 2\cos t)$ e dato che il lavoro è l' integrale di $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}'$ abbiamo

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\phi}(t)\big) = (8\,\mathrm{sen}\,t\cos t\ ,\ 4\cos^2 t - 4\,\mathrm{sen}\,t)$$

e quindi (ricordando che $\cos^3 t = (1-\mathrm{sen}^2\,t)\cos t$)

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\phi}(t)\big)\cdot\boldsymbol{\phi}'(t) = -16\,\mathrm{sen}^2\,t\cos t + 8\cos^3 t - 8\,\mathrm{sen}\,t\cos t = (-24\,\mathrm{sen}^2\,t + 8 - 8\,\mathrm{sen}\,t)\cos t$$

e il lavoro è

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-24\,\mathrm{sen}^2\,t + 8 - 8\,\mathrm{sen}\,t)\cos t\,dt = \Big[-8\,\mathrm{sen}^3\,t + 8\,\mathrm{sen}\,t - 4\,\mathrm{sen}^2\,t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0\ .$$

Soluzione più veloce ma bisogna conoscere i potenziali: dato che

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y)\ ,$$

il campo $\boldsymbol{F}$ ammette un potenziale f , che si trova subito integrando $2xy$ rispetto a x , in modo da ottenere

$$f(x,y) = x^2y + c(y)\ ,$$

e determinando $c(y)$ in modo che $f_y = x^2 - 2y$. Dunque il potenziale è

$$f(x,y) = x^2y - y^2$$

e visto che la curva va da $\boldsymbol{A} = (0,-1)$ a $\boldsymbol{B} = (0,1)$ il lavoro è

$$f(\boldsymbol{B}) - f(\boldsymbol{A}) = (-1) - (-1) = 0\ .$$

PROBLEMA 2

L' integrale della funzione $x - y$ sull' insieme $\{(x,y) : x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ vale (cerchiare la risposta corretta)

$$\mathbf{0\ ,\qquad 9/10\ ,\qquad 4/5\ .}$$

Dato che $x^2 \leq \sqrt{x}$ per $0 \leq x \leq 1$ l'integrale si scrive

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x - y)\, dy \right) dx &= \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^{3/2} - \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right] dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = 0 \ .\end{aligned}$$

Soluzione più fantasiosa: la funzione $x - y$ è dispari rispetto alla bisettrice del primo quadrante, e il dominio è simmetrico, quindi l'integrale fa zero.

PROBLEMA 3

Se il grafico di f è il seguente, certamente f non è differenziabile (cerchiare la risposta corretta)

un piano, un cono, un paraboloide.

Il piano e il paraboloide sono grafici di funzioni differenziabili ovunque, il cono non ha piano tangente nell'origine.

PROBLEMA 4

Determinate la soluzione generale di $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen} x$.

L'equazione omogenea associata è $y'' - 3y' + 2y = 0$, l'equazione caratteristica è $z^2 - 3z + 2 = 0$ e ha soluzioni $z = 1$ e $z = 2$, quindi le soluzioni fondamentali sono e^x ed e^{2x} e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} .$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x \Rightarrow \bar{y}'(x) = a \cos x - b \operatorname{sen} x \Rightarrow \bar{y}''(x) = -a \operatorname{sen} x - b \cos x$$

e quindi

$$\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = (a + 3b) \operatorname{sen} x + (b - 3a) \cos x .$$

Se vogliamo che risolva l'equazione deve essere

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ b - 3a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3a \\ a + 9a = 1 \end{cases} \iff a = \frac{1}{10} , \ b = \frac{3}{10}$$

perciò una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{10} \operatorname{sen} x + \frac{3}{10} \cos x$$

e la soluzione generale cercata è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \operatorname{sen} x + \frac{3}{10} \cos x .$$

PROBLEMA 5

Disegnate gli insiemi A, B e C, dove

$$\boldsymbol{A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2y\}\ , \qquad B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2|y|\}}$$

e C è la parte della palla unitaria che non sta in B e sta a destra dell'asse delle ordinate.
Calcolate l'area di C.
Calcolate l' integrale su C di

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}}\ .$$

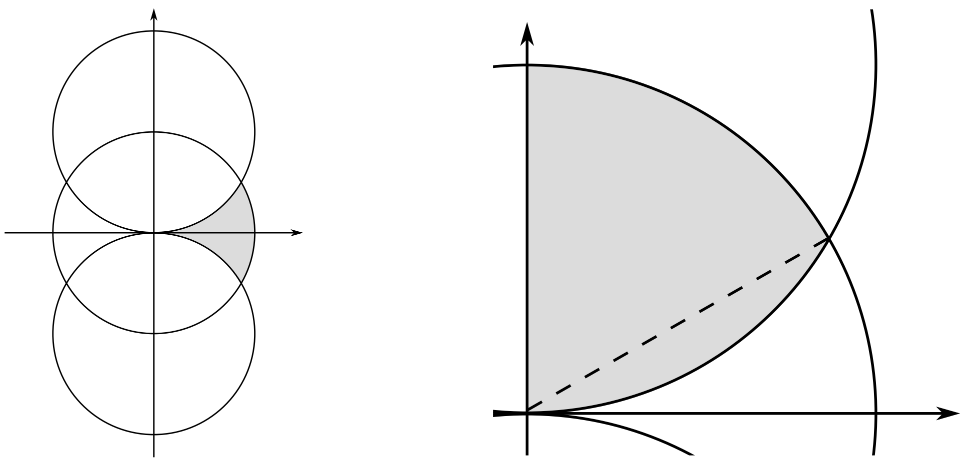
Dato che

$$x^2 + y^2 \le 2y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 \le 1\ ,$$

l' insieme A è la palla chiusa di raggio 1 centrata in $(0,1)$. Osserviamo che questa è tutta contenuta nel semipiano $y \ge 0$. Allora

$$B = \{(x,y) : y \ge 0\ ,\ x^2 + y^2 \le 2y\} \cup \{(x,y) : y \le 0\ ,\ x^2 + y^2 \le -2y\}$$

è l'unione di A e della palla (simmetrica di A) di raggio 1 centrata in $(0,-1)$. Infine C è rappresentato nella prima figura.



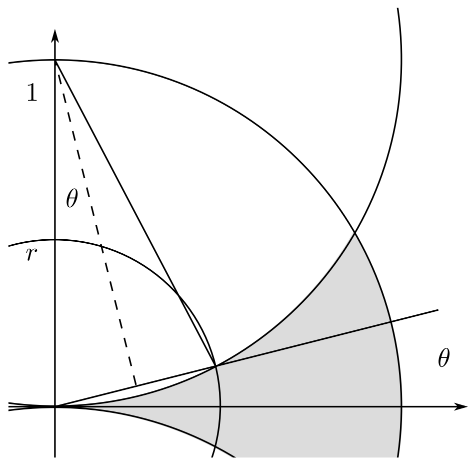
Per calcolare l'area non servono gli integrali: basta determinare l'area a della parte grigia nella seconda figura, poi fare pochi conti (l'area di C è la differenza fra quella di un semicerchio e il doppio di a). Per calcolare a spezziamo la figura in un settore circolare (un sesto di cerchio) e una lunetta che è la differenza fra il settore circolare e un triangolo equilatero, dunque

$$a = \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ ,$$

dunque l'area cercata vale

$$\frac{\pi}{2} - 2a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

(sono possibili altre scomposizioni).



Invece per l'integrale occorre usare le coordinate polari, e in particolare determinare, fissato $0 < r \leq 1$, gli estremi fra cui varia θ. Come si vede nell'ultima figura, la semicirconferenza di raggio r centrata nell'origine interseca quella di raggio 1 centrata in $(0,1)$ per $\theta = \operatorname{arcsen}(r/2)$. Allora, ricordando che in due dimensioni lo jacobiano della trasformazione in coordinate polari vale r, abbiamo

$$\int_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\operatorname{arcsen}(r/2)}^{\operatorname{arcsen}(r/2)} \frac{1}{r\sqrt{4-r^2}} r\,d\theta \right) dr = \int_0^1 2 \operatorname{arcsen}\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\ .$$

Ma la derivata di $\operatorname{arcsen}(r/2)$ è $1/\sqrt{4-r^2}$, perciò continuiamo con

$$\cdots = \Big[\operatorname{arcsen}^2(r/2)\Big]_0^1 = \operatorname{arcsen}^2(1/2) = (\pi/6)^2 = \frac{\pi^2}{36}\ .$$

PROBLEMA 6

Una ditta può produrre tre tipi di bicchieri; per produrre 100 bicchieri del tipo A servono 20kg d vetro, per il tipo B 25kg e per il tipo C 30kg. D'altra parte il guadagno della ditta è pari a 70 centesimi per ogni bicchiere di tipo A, 80 per ogni bicchiere di tipo B e 1 euro per bicchiere di tipo C. La ditta ha in magazzino 3000kg di vetro grezzo. Quanti di tipo A, quanti di B e quanti di C conviene che ne produca, per massimizzare il guadagno?
Dopo aver fatto i calcoli il direttore di produzione scopre che ci sono imballaggi solo per 12000 bicchieri. Quanti di tipo A, quanti di B e quanti di C conviene che ne produca, per massimizzare il guadagno?

Producendo a bicchieri di tipo A, b di B e c di C il guadagno è

$$f(a,b,c) = \frac{70}{100}a + \frac{80}{100}b + c\,.$$

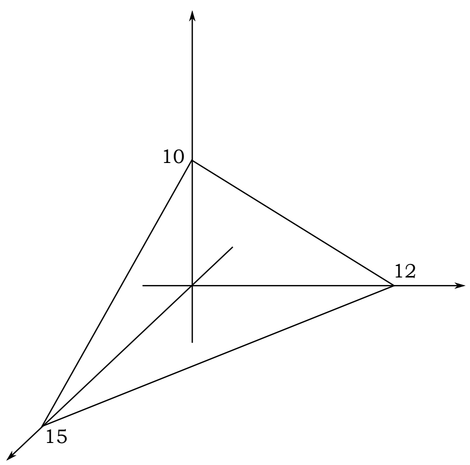
D'altra parte deve essere

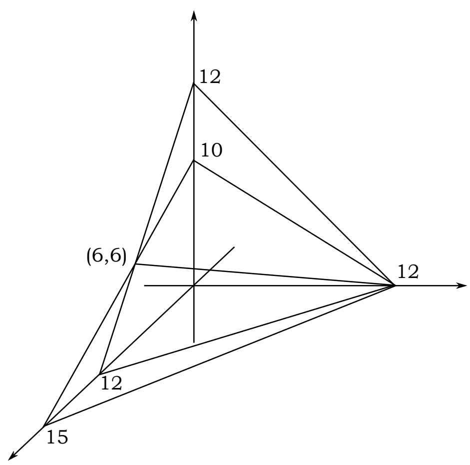
$$a \geq 0\,, \quad b \geq 0\,, \quad c \geq 0$$

e inoltre

$$20 \cdot \frac{a}{100} + 25 \cdot \frac{b}{100} + 30 \cdot \frac{c}{100} \leq 3000 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4a + 5b + 6c \leq 60000\,.$$

Dobbiamo dunque massimizzare f sulla parte A dell'ottante $a, b, c \geq 0$ che sta sotto al piano π di equazione $4a+5b+6c \leq 60000$, che costituisce un insieme chiuso (intersezione di quattro semispazi chiusi) e limitato (tutte le coordinate sono sicuramente fra 0 e $15000 = 60000/4$). Si vede subito che ∇f non si annulla mai, quindi il massimo, che esiste dato che f è continua, si trova sul bordo.





D'altra parte A è un poliedro con quattro facce, tre sui piani coordinati e una sul piano π. Se il massimo si trovasse all'interno di una delle facce, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange il gradiente di f dovrebbe essere ortogonale alla faccia, ma $\nabla f = (0.7, 0.8, 1)$ non è ortogonale ad alcuna delle facce. Allora il punto di massimo si trova su qualcuno degli spigoli. Se si trovasse all' interno di qualche spigolo, ∇f dovrebbe essere ortogonale allo spigolo, ma dato che ∇f è costante la funzione f sarebbe costante su tutto lo spigolo. Allora il valore massimo si trova comunque fra i valori di f nei vertici di A. Determiniamo i vertici, che sono

$$(15000, 0, 0)\ , \qquad (0, 12000, 0)\ , \qquad (0, 0, 10000)$$

e calcoliamo i rispettivi valori di f, che sono

$$1050\ , \qquad 960\ , \qquad 1000\ .$$

Allora conviene produrre solo bicchieri di tipo A.
Se ci fossero stati imballaggi per 15000 bicchieri la soluzione sarebbe stata ancora la precedente, ma ora non è più accettabile dato che abbiamo un ulteriore vincolo:

$$a + b + c \leq 12000\ .$$

Tuttavia i ragionamenti precedenti continuano a valere, e dobbiamo (più difficile) trovare i valori nei vertici del nuovo poliedro ammissibile. Questo ha una faccia in più del precedente, ha vertici in

$$(12000, 0, 0)\ , \qquad (6000, 0, 6000)\ , \qquad (0, 12000, 0)\ , \qquad (0, 0, 10000)$$

e calcolando i due valori nei vertici nuovi otteniamo come valori di f

$$840\ , \qquad 1020\ , \qquad 960\ , \qquad 1000\ :$$

adesso conviene produrre 6000 bicchieri A e 6000 bicchieri C. Si può risolvere il problema anche con i moltiplicatori di Lagrange (e si vede che non c'è mai soluzione sulle facce) e poi parametrizzando gli spigoli (e si arriva alla stessa conclusione).
Soluzione più fantasiosa: producendo due bicchieri B si consuma lo stesso vetro che fabbricando un A e un C (e, per il secondo punto, si usano gli stessi imballaggi), ma con due B si guadagna meno che con un A e un C, dunque non conviene mai produrre bicchieri di tipo B e il problema si riduce di dimensione. Basta dunque massimizzare $70a + 100c$ sul triangolo

$$\{(a, c) : a \geq 0\ ,\ c \geq 0\ ,\ 4a + 6c \leq 60000\}$$

o sul quadrilatero

$$\{(a, c) : a \geq 0\ ,\ c \geq 0\ ,\ 4a + 6c \leq 60000\ ,\ a + c \leq 12000\}\ .$$

Altra soluzione solo per il primo punto: il massimo non può essere in un punto (a, b, c) che consuma $k < 3000$ kg di vetro, perché nel punto $3000/k)(a, b, c)$ il guadagno sarebbe maggiore. Allora il vincolo in realtà è

$$4a + 5b + 6c = 60000$$

da cui $c = 10000 - (2/3)a - (5/6)b$ e la funzione guadagno diventa

$$\frac{7}{10}a + \frac{4}{5}b + 10000 - \frac{2}{3}a - \frac{5}{6}b = 10000 + \frac{1}{30}a - \frac{1}{30}b$$

e chiaramente non conviene mai produrre bicchieri b.

Risoluzione del compito n. 5 (Settembre 2015/2)

PROBLEMA 1

Un cono in $\mathbb{R}^3$ può avere equazione (cerchiare la risposta corretta)

$$x + 1 - 3\sqrt{y^2 + z^2} = 6 \,, \qquad z = 2 - \sqrt{1 + x^2} \,, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{16} \,.$$

La prima è l'equazione del cono $x = 5 + 3\sqrt{y^2 + z^2}$ che ha vertice $(5, 0, 0)$, asse l'asse x, apertura $\arctan 1/3$ ed è diretto verso il semiasse positivo delle x. La seconda è l'equazione di un cilindro che si ottiene trascinando lungo la direzione y il grafico (tracciato nel piano x, z) della funzione $z = 2 - \sqrt{1 + x^2}$ (che è mezza iperbole), mentre l'ultima è l'equazione di un iperboloide di rotazione a una falda, che si ottiene ruotando attorno all'asse y l'iperbole (nel piano x, y) di equazione $x^2/4 - y^2/16 = 1$.

PROBLEMA 2

Nel punto stazionario $(0, 1)$ la funzione $f(x, y) = x^3y - 2xy^2 + 2xy$ ha (cerchiare la risposta corretta)

un massimo locale, un minimo locale, una sella.

Dato che $\nabla f(x, y) = (3x^2y - 2y^2 + 2y \,,\ x^3 - 4xy + 2x)$ e che

$$f_{xx} = 6xy \,, \qquad f_{xy} = 3x^2 - 4y + 2 \,, \qquad f_{yy} = -4x \,,$$

la matrice hessiana in $(0, 1)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e ha determinante negativo, quindi in $(0, 1)$ c'è una sella.

PROBLEMA 3

La lunghezza della curva definita su $[0, 2]$ da $\phi(t) = (t \cos t \,,\ t \operatorname{sen} t \,,\ \sqrt{8t^3}/3)$ è (cerchiare la risposta corretta)

$$2\pi \,, \qquad 4 \,, \qquad \sqrt{2 + \pi^2} \,, \qquad 0 \,.$$

Intanto, dopo aver scritto $\sqrt{8t^3} = 2\sqrt{2}\, t^{3/2}$, calcoliamo

$$\phi'(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t \,,\ \operatorname{sen} t + t \cos t \,,\ \sqrt{2t} \,,) \quad \Rightarrow \quad \|\phi'(t)\| = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = t + 1$$

(in generale $\sqrt{(t + 1)^2}$ sarebbe $|t + 1|$ ma la curva è definita solo per $t \geq 0$) quindi

$$\mathcal{L} = \int_0^2 \|\phi'(t)\|\, dt = \int_0^2 (t + 1)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = 4 \,.$$

PROBLEMA 4

Considerate il problema ai limiti

$$\begin{cases} y' - 3y = \operatorname{sen}(3x) \\ y(0) = y(\pi/3) \ . \end{cases}$$

a) Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
b) Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.
c) Determinate, se esistono, le soluzioni del problema assegnato.

L'equazione $y' = 3y$ ha soluzione generale $y(x) = c\,\mathrm{e}^{3x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale nella forma

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) = A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x) &\Rightarrow \bar{y}' = -3A\operatorname{sen}(3x) + 3B\cos(3x) \\ &\Rightarrow \bar{y}' - 3\bar{y} = (-3A - 3B)\operatorname{sen}(3x) + (3B - 3A)\cos(3x) \ . \end{aligned}$$

Deve allora essere

$$\begin{cases} 3B - 3A = 0 \\ -3A - 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = B \\ -6A = 1 \end{cases} \iff A = B = -\frac{1}{6} \ .$$

Allora una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) \ .$$

Abbiamo allora

$$y(0) = c - \frac{1}{6} \ , \qquad y\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = c\,\mathrm{e}^{\pi} + \frac{1}{6}$$

e perché sia soddisfatta l'ultima condizione deve essere

$$c - \frac{1}{6} = c\,\mathrm{e}^{\pi} + \frac{1}{6} \iff c(\mathrm{e}^{\pi} - 1) = -\frac{1}{3}$$

per cui la soluzione cercata è

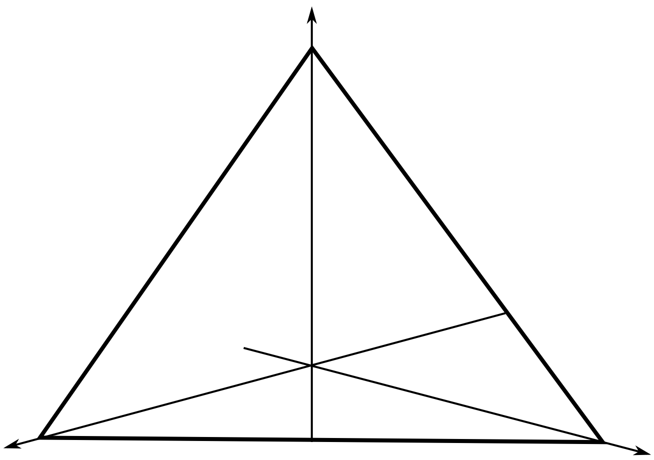
$$y(x) = -\frac{1}{3(\mathrm{e}^{\pi} - 1)}\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) \ .$$

PROBLEMA 5

Un corriere trasporta solo scatole a forma di parallelepipedo rettangolo, e fa pagare il trasporto in base alla somma delle tre dimensioni. Determinate la forma della scatola di massimo volume, fra quelle che hanno somma delle tre dimensioni pari a 120 cm.
Le poste americane usano una regola differente: per una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, l'altezza è definita come la dimensione maggiore, la base è il rettangolo formato dai due lati restanti. Il costo di trasporto è calcolato in base alla somma fra altezza e perimetro di base. Volendo determinare la forma della scatola di massimo volume, fra quelle che hanno somma fra altezza e perimetro di base pari a 120 cm, come cambia l'impostazione del problema? Risolvete il nuovo problema.

Nota: nella prima versione, la somma delle tre dimensioni era "non superiore" a 120 cm. Questa soluzione si riferisce alla prima versione; quella data al compito, con somma "pari" a 120 cm, è molto più facile. Riporto in corsivo le grosse semplificazioni, ma guardate anche quella completa.
Se le tre dimensioni sono h, l, p dobbiamo trovare il massimo del volume $v(h, l, p) = hlp$ con il vincolo $(h, l, p) \in A$ dove

$$A = \{(h, l, p) \in \mathbb{R}^3 : h \geq 0\ ,\ l \geq 0\ ,\ p \geq 0\ ,\ h + l + p = 120\}$$



(l'asse h è in alto, anche se per questa parte dell'esercizio non importa). Osserviamo che v è continua e che A, essendo intersezione di chiusi, è chiuso. È anche limitato dato che

$$(h, l, p) \in A \quad \Rightarrow \quad l, p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h \leq h + l + p \leq 120$$

e pertanto $0 \leq h \leq 120$ e lo stesso per l e p. Allora A è compatto e v ha massimo. Inoltre v è non negativa in A, e ad esempio nel punto $(100, 10, 10)$ è positiva, quindi il massimo di v è un numero positivo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (con il vincolo rappresentato da $g(h,l,p) = h + l + p - 120 = 0$ e ricordando che i tre numeri non sono nulli per cui possiamo, se serve, dividere tranquillamente) dà

$$\begin{cases} lp = \lambda \\ hp = \lambda \\ hl = \lambda \\ h + l + p = 120 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = l = p = 40$$

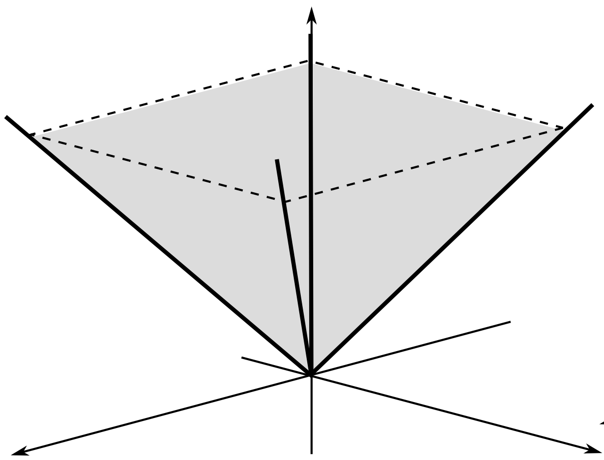
(infatti dalle prime due righe otteniamo $lp = hp$ da cui $l = h$ dividendo per p, poi anche $l = p$ dalle ultime due). Allora il punto di massimo è la scatola cubica $40 \times 40 \times 40$ che ha volume $64 \ \mathrm{dm}^3$.
Vediamo cosa serve modificare per trattare la seconda parte: il vincolo è ora $(h,l,p) \in B$ dove

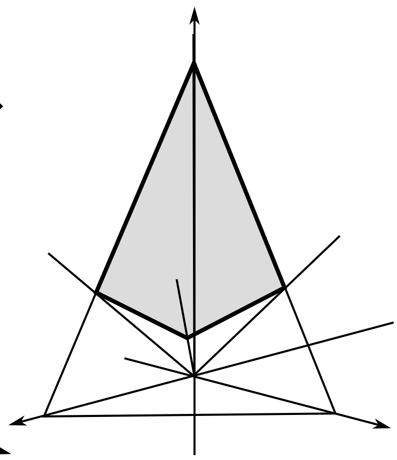
$$B = \{(h,l,p) \in \mathbb{R}^3 : h \geq 0 \ , \ l \geq 0 \ , \ p \geq 0 \ , \ h \geq l \ , \ h \geq p \ , \ h + 2(l+p) = 120\} \ ,$$

che di nuovo è compatto; ancora il massimo di v esiste ed è positivo, quindi si trova in un punto in cui le coordinate non sono nulle; la figura a sinistra è la piramide

$$\{(h,l,p) \in \mathbb{R}^3 : h \geq 0 \ , \ l \geq 0 \ , \ p \geq 0 \ , \ h \geq l \ , \ h \geq p\} \ ,$$

quella a destra l'insieme B .





Ora però ci sono anche altri lati, non solo quelli dove qualche coordinata si annulla. Ricordiamo che il sistema dei moltiplicatori di Lagrange si può applicare nei punti che stanno dentro a questa faccia, e non sugli spigoli o sui vertici. Volutamente, trascuriamo per il momento le condizioni $h \geq l$ e $h \geq p$, e cerchiamo il massimo di v sul triangolo

$$B' = \{(h,l,p) : h \geq 0 \ , \ l \geq 0 \ , \ p \geq 0 \ , \ h + 2(l+p) = 120\} \supset B \ .$$

Il sistema di Lagrange darebbe

$$\begin{cases} lp = \lambda \\ hp = 2\lambda \\ hl = 2\lambda \\ h, l, p > 0 \ , \ \ (h \geq l \ , \ \ h \geq p) \ , \ \ h + 2l + 2p = 120 \ ; \end{cases}$$

ma le prime tre equazioni danno $h = 2l = 2p$, da cui $h = 40$ e $l = p = 20$. Notiamo che $\boldsymbol{P} = (40, 20, 20)$ è l'unico punto stazionario di v in B' e che v vale zero sui bordi di B' pertanto $\boldsymbol{P}$ è necessariamente il punto di massimo assoluto della funzione continua v sul compatto B'. Ma $\boldsymbol{P} \in B \subset B'$ quindi $v(\boldsymbol{P})$ è il massimo di v su B, e vale

$$v(40, 20, 20) = 16 \text{ dm}^3 \ .$$

Osserviamo che non sarebbe bastato (considerando anche le disuguaglianze fra parentesi) trovare un unico punto stazionario $\boldsymbol{P}$ in B per concludere che era il punto di massimo cercato: avremmo dovuto escludere che ci fosse un punto sugli spigoli (o vertici) bordo di B in cui v aveva valore ancora più grande.

PROBLEMA 6

Descrivete e disegnate gli insiemi

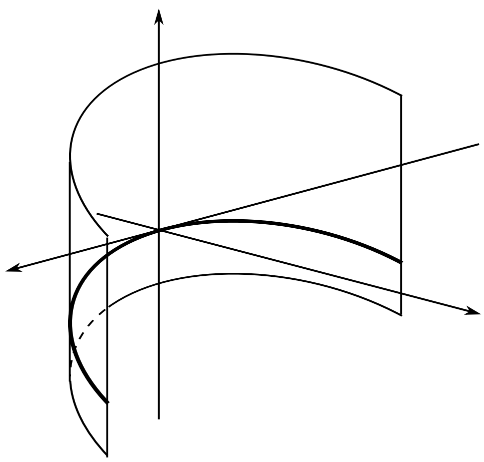
$$\boldsymbol{A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}}\ , \qquad \boldsymbol{B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z + 2 = 0\}}\ .$$

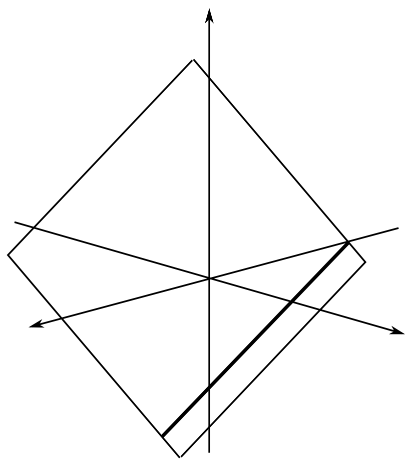
Disegnate l' insieme

$$\boldsymbol{C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\ ,\ 0 \leq z \leq x - y + 2\}}\ .$$

Calcolate il volume di $\boldsymbol{C}$.

Il primo insieme è un paraboloide di trascinamento, ottenuto trascinando parallelamente all'asse z la parabola del piano (x, y) che ha equazione $y = x^2$. Il secondo insieme è un piano, ortogonale al vettore $(1, -1, 1)$.



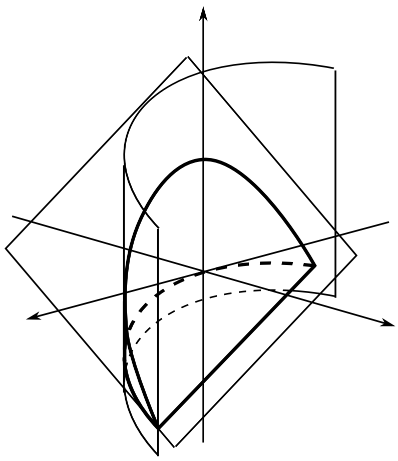


L' insieme A divide $\mathbb{R}^3$ in due parti, quella "dentro" la concavità e quella fuori. L' insieme C si ottiene prendendo la parte dentro la concavità della parabola, e intersecandola con la parte di spazio che sta sopra (nel senso della coordinata z) il piano $z = 0$ e sotto il piano B . Conviene vedere dove il piano B interseca il piano $z = 0$: questo accade sulla retta del piano (x, y) che ha equazione $y = x + 2$, in neretto nella figura sopra. A sua volta, questa interseca la parabola $y = x^2$ per $x = -1$ e per $x = 2$, dunque

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2\ ,\ x^2 \leq y \leq x + 2\ ,\ 0 \leq z \leq x - y + 2\}\ .$$

Ora è facile calcolare

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(C) &= \int_C 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2}^{x+2}\left(\int_0^{x-y+2} 1\,dz\right)dy\right\}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2}(x-y+2)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{2}\left[xy-\frac{y^2}{2}+2y\right]_{x^2}^{x+2} dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left[\left(x^2+2x-\frac{1}{2}(x^2+4x+4)+2x+4\right)-\left(x^3-\frac{x^4}{2}+2x^2\right)\right]dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left(\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{3x^2}{2}+2x+2\right)dx = \left[\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+x^2+2x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{32}{10}-\frac{16}{4}-\frac{8}{2}+4+4\right)-\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1-2\right) \\
&= \frac{33}{10}+\frac{3}{4}=\frac{81}{20}\,.
\end{aligned}$$



Risoluzione del compito n. 6 (Gennaio 2016)

PROBLEMA 1

Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = (x^2+2y^2)^{-1/2} + \log(3+y)$ in $\big(2,-2,f(2,-2)\big)$ ha equazione (cerchiare la risposta corretta)

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{36}x + \frac{18+\sqrt{3}}{18}y + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad z = x - 2y - 6\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$z = x - 3y + 5 \qquad z\sqrt{12} - 1 = 0\ .$$

Se $z_0 = f(x_0,y_0)$, l'equazione del piano tangente in (x_0,y_0,z_0) è

$$z - z_0 = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)\ ,$$

perciò calcoliamo

$$\partial_x f = -\frac{x}{(x^2+2y^2)^{3/2}}\ , \qquad \partial_y f = -\frac{2}{(x^2+2y^2)^{3/2}} + \frac{1}{3+y}$$

quindi

$$f(2,-2) = 12^{-1/2} + \log 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\ ,$$

$$\partial_x f(2,-2) = -\frac{1}{12\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{36}\ , \qquad \partial_y f(2,-2) = \frac{1}{6\sqrt{3}} + 1 = \frac{18+\sqrt{3}}{18}$$

e l'equazione è

$$z - \frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{36}(x-2) + \frac{18+\sqrt{3}}{18}(y+2)$$

ossia

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{36}x + \frac{18+\sqrt{3}}{18}y + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{18+\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{36}x + \frac{18+\sqrt{3}}{18}y + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

PROBLEMA 2

La funzione $\mathrm{e}^{2x} - 1$ risolve l'equazione differenziale (cerchiare la risposta corretta)

$$y' = 2y \qquad y' = y+1 \qquad y' = 2y+2 \qquad y' = y\ .$$

Dato che $y' = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ la risposta corretta è $y' = 2y + 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1) + 2$.

PROBLEMA 3

La funzione f è derivabile infinite volte, e ha un minimo assoluto in $(0,0)$. La sua matrice hessiana in $(0,0)$ potrebbe essere (cerchiare la risposta corretta)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

La matrice hessiana è simmetrica, dato che per il Teorema di Schwarz $f_{xy} = f_{yx}$, quindi la prima e la terza risposta sono fuori questione. Poi sia la seconda che la quarta matrice hanno determinante positivo, ma mentre la seconda ha il primo termine (che corrisponde a f_{xx}) positivo, e quindi è associata a un punto di minimo locale, la quarta ha il primo termine negativo, e quindi è associata a un punto di massimo locale.

PROBLEMA 4

Considerate gli insiemi

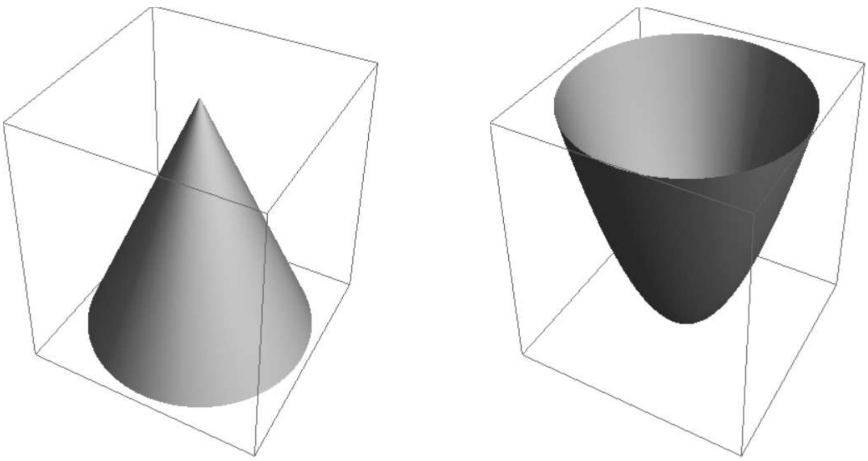
$$\boldsymbol{A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2}\}}$$

$$\boldsymbol{B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge -2 + x^2+y^2\}}$$

$$\boldsymbol{C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \ge -2 + x^2+y^2\}\ .}$$

a) Descrivete gli insiemi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ e disegnateli.
b) Calcolate l'integrale su $\boldsymbol{C}$ della funzione $\boldsymbol{f(x,y,z) = x+y}$.

Gli insiemi A e B sono molto facili: il primo è la metà inferiore di un cono solido con vertice in $(0,0,4)$ e asse l'asse z, il secondo è la parte sopra un paraboloide con vertice in $(0,0,-2)$, asse l'asse z e concavità verso l'alto.



Poi C è un quarto di $A \cap B$, precisamente la parte che sta nel quadrante $x,y \ge 0$. Osserviamo che A e B sono solidi di rotazione, e quindi lo è anche $A \cap B$ che è generato dalla rotazione della figura più sotto a destra: il punto di intersezione si trova risolvendo (con $r \ge 0$)

$$\begin{cases} z = 4 - r \\ z = -2 + r^2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = r = 2\ .$$

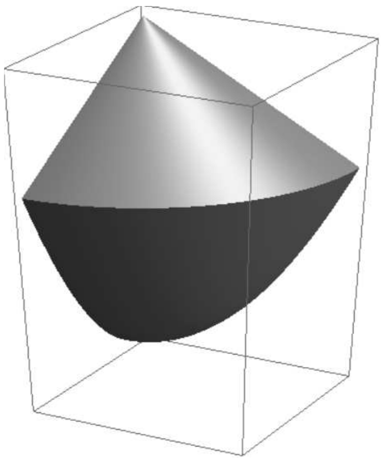
Conviene integrare per fili, osservando che la proiezione di C sul piano (x,y) è

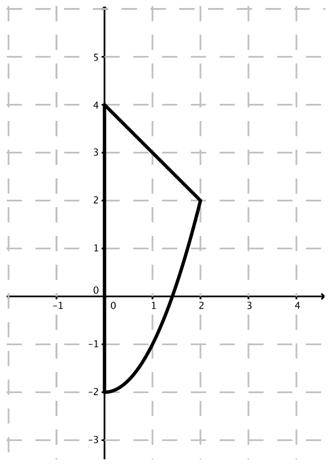
$$\Pi = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$$

e che per ogni punto $(x,y) \in \Pi$ la sezione è il segmento che va da $z = -2 + x^2 + y^2$ a

$z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$. Allora, passando poi a coordinate polari per l'integrale su Π ,

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)\,dx\,dy\,dz &= \int_\Pi (x+y)\Big(\int_{-2+x^2+y^2}^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dz\Big)dx\,dy \\
&= \int_\Pi (x+y)(6-\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2)\,dx\,dy \\
&= \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^2 (6-r-r^2)(r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\Big)d\theta \\
&= \Big(\int_0^2 (6r^2-r^3-r^4)\,dr\Big)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta \\
&= \Big[2r^3-\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\Big]_0^2\,\big[\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\big]_0^{\pi/2} = \frac{28}{5}\cdot 2 = \frac{56}{5}\ .
\end{aligned}$$





PROBLEMA 5

Considerate il problema di Cauchy $\begin{cases} \boldsymbol{y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}} \\ \boldsymbol{y(0) = y'(0) = 0} \; . \end{cases}$

a) **Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.**
b) **Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.**
c) **Determinate la soluzione del problema di Cauchy.**

L'equazione caratteristica è $z^2 - 4z + 8 = 0$ ovvero $(z-2)^2 + 4 = 0$, e ha soluzioni $z = 2 \pm 2\mathrm{i}$, quindi le soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea sono

$$\mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(2x) \; , \qquad \mathrm{e}^{2x} \cos(2x)$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 \, \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(2x) + c_2 \, \mathrm{e}^{2x} \cos(2x) \; .$$

Dato che e^{2x} non è una soluzione fondamentale, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $c \cdot \mathrm{e}^{2x}$: abbiamo

$$\bar{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \; , \quad \bar{y}'(x) = 2c \cdot \mathrm{e}^{2x} \; , \quad \bar{y}''(x) = 4c \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}''(x) - 4\bar{y}'(x) + 8\bar{y}(x) = 4c \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

e se vogliamo che questo sia e^{2x} occorre scegliere $c = 1/4$. Allora la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(2x) + c_2 \, \mathrm{e}^{2x} \cos(2x) + \frac{1}{4} \, \mathrm{e}^{2x} \; .$$

Osserviamo che $y(0) = c_2 + 1/4$ e che

$$y'(x) = (2c_1 + 2c_2) \, \mathrm{e}^{2x} \cos(2x) + \cdots \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2} \, \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 2c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2}$$

quindi le costanti c_1, c_2 devono verificare

$$\begin{cases} c_2 + \frac{1}{4} = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{4} \; , \; c_1 = 0$$

e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{4} \, \mathrm{e}^{2x} \cos(2x) + \frac{1}{4} \, \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{4} \, \mathrm{e}^{2x} \big(1 - \cos(2x) \big) \; .$$

PROBLEMA 6

Considerate la funzione $f(x,y) = 12xy^2 + 4y^2 - 27x^3 - 9x^2$.
a) **Individuate i punti dove ∇f si annulla e descriveteli.**
b) **Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.**
c) **Giustificate perché esistono il massimo e il minimo di f su $R = [-2,0] \times [0,1]$.**
d) **Calcolate il massimo e il minimo di f su R .**

Abbiamo

$$\partial_x f = 12y^2 - 81x^2 - 18x \ , \qquad \partial_y f = 24xy + 8y = 8y(1+3x) \ ,$$

dunque $\partial_y f(x,y)$ si annulla solo per $y = 0$ oppure per $x = -1/3$. Se $y = 0$, la derivata $\partial_x f$ si annulla solo per $x = 0$ o per $x = -2/9$, mentre se $x = -1/3$ la derivata $\partial_x f$ si annulla solo per $y = \pm 1/2$. Abbiamo allora i seguenti punti stazionari:

$$S_1 = (0,0) \ , \quad S_2 = \left(-\frac{2}{9}, 0\right) \ , \quad S_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \ , \quad S_4 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \ .$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H(x,y)$:

$$\partial_{xx} f = -162x - 18 \ , \qquad \partial_{xy} f = 24y \ , \qquad \partial_{yy} f = 24x + 8$$

quindi

$$H(S_1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \ , \quad H(S_2) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$H(S_3) = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad H(S_4) = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

La seconda matrice ha determinante positivo e traccia positiva, quindi S_2 è un punto di minimo locale. Invece le altre matrici hessiane hanno determinante negativo e perciò gli altri tre punti stazionari sono selle.
Su tutto $\mathbb{R}^2$ gli estremi sono $+\infty$ e $-\infty$, dato che ad esempio

$$\lim_{y \to +\infty} f(0,y) = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x,0) = -\infty \ .$$

La funzione f è continua e R è un compatto, quindi massimo e minimo esistono per il Teorema di Weierstraß. Il solo punto che cade all'interno di R , fra quelli dove il gradiente si annulla, è S_3 ma corrisponde a una sella. Studiamo allora f sul bordo di R , studiando rispettivamente

$$\begin{aligned}
&g_b(t) = f(t,0) = -27t^3 - 9t^2 \ , \qquad -2 \le t \le 0 \\
&g_a(t) = f(t,1) = 12t + 4 - 27t^3 - 9t^2 \ , \qquad -2 \le t \le 0 \\
&g_s(t) = f(-2,t) = -20t^2 + 180 \ , \qquad 0 \le t \le 1 \\
&g_d(t) = f(0,t) = 4t^2 \ , \qquad 0 \le t \le 1 \ .
\end{aligned}$$

Cominciamo dal fondo: sul lato destro chiaramente il massimo è in $(0,1)$ e il minimo in $(0,0)$ mentre altrettanto chiaramente sul lato sinistro il massimo è in $(-2,0)$ e il minimo in $(-2,1)$: dovremo calcolare f nei quattro vertici. Ora sul lato basso: la funzione g_b' si annulla solo per $t=0$ e $t=-2/9$, quindi oltre ai quattro vertici dovremo considerare il punto S_2. Infine il lato alto: dato che g_a' si annulla per $t=-(1+\sqrt{13})/9$, dovremo considerare anche il punto $P=\bigl(-(1+\sqrt{13})/9,1\bigr)$. Abbiamo

$$f(0,0)=0\,, \quad f(0,1)=4\,, \quad f(-2,0)=180\,, \quad f(-2,1)=160\,,$$

$$f(S_2)=-4/27\,, \quad f(P)=g_a\bigl(-(1+\sqrt{13})/9\bigr)=(70-26\sqrt{13})/27\,.$$

Dato che
$$\frac{70-26\sqrt{13}}{27}<-\frac{4}{27} \iff 37<13\sqrt{13} \iff 1369<2197$$
che è vero, il massimo di f su R è 180 e il minimo $(70-26\sqrt{13})/27$.

Risoluzione del compito n. 7 (Febbraio 2016)

PROBLEMA 1

La funzione $f(x,y) = 3x^2 - 2y$ su $[-1,1] \times [0,2]$ ha massimo M e minimo m. Allora $M - m$ vale (cerchiare la risposta corretta)

$$\mathbf{1} \qquad \mathbf{5} \qquad \mathbf{7} \qquad \mathbf{14}\ .$$

La funzione f è continua e l' insieme compatto, quindi massimo e minimo esistono. Poi, f è decrescente rispetto a y, quindi il massimo va ricercato dove $y = 0$ e il minimo dove $y = 2$. È poi pari rispetto a x, quindi tanto vale considerare solo la parte dove $x \geq 0$: allora f è crescente rispetto a x, quindi ha minimo dove $x = 0$ e massimo dove $x = 1$ (quindi anche dove $x = -1$). In conclusione f ha massimo in $(\pm 1, 0)$ e minimo in $(0,2)$, quindi $M = 3$ e $m = -4$ e la differenza vale 7.

PROBLEMA 2

Se $\int_E xy\,dx\,dy = 1$ allora E potrebbe essere (cerchiare la risposta esatta)

$$\{|x| \leq \sqrt{2}\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2}\} \qquad \{0 \leq x \leq 1\ ,\ -1 \leq y \leq 0\}\ ,$$

$$\{0 \leq x \leq \sqrt{2}\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2}\} \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ .$$

La funzione xy è dispari sia rispetto a x che a y: dunque il suo integrale su un insieme simmetrico rispetto a uno dei due assi vale zero, e la prima risposta è dunque errata. Sul quarto quadrante $xy < 0$, quindi il suo integrale sul secondo insieme deve essere negatvo; sul quarto insieme l' integrale (che è improprio) non ha senso: infatti per $x, y \geq 1$ è $xy \geq 1$, dunque l' integrale sul primo quadrante vale $+\infty$ e analogamente quello sul secondo vale $-\infty$, dunque non ha senso la somma. L'unica possibilità è il terzo insieme: infatti l' integrale vale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\Big(\int_0^{\sqrt{2}} y\,dy\Big)\,dx = \Big(\int_0^{\sqrt{2}} t\,dt\Big)^2 = 1^2 = 1\ .$$

PROBLEMA 3

Una delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = -\,e^{-x}y^2 + e^x(x^2 + x + 1)$ è (cerchiare la risposta esatta)

$$e^{2x} \qquad x\,e^x \qquad (x+1)^2 - x \qquad e^x$$

Chiaramente da e^{2x} e da e^x non usciranno mai i termini polinomiali che compaiono al secondo membro. Altrettanto, da $(x+1)^2 - x$ e dalla sua derivata (un altro polinomio) moltiplicata per e^{-x} non uscirà certo il termine e^x, dunque l'unica speranza è $y(x) = x\,e^x$: in effetti $y'(x) = x\,e^x + e^x$, quindi

$$y'(x) + e^{-x}y^2(x) = x\,e^x + e^x + e^{-x}(x\,e^x)^2 = x\,e^x + e^x + x^2\,e^x = (x^2 + x + 1)\,e^x\ .$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione $f(x,y) = (x^2-1)^2 + 8y^2 - y^4$.
a) Trovate i punti stazionari di f e determinatene la natura.
b) Determinate il massimo e il minimo di f sul quarto di cerchio

$$Q = \{x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x^2 + y^2 \leq 5\}\ .$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \partial_x f = 4x(x^2-1) = 4x(x+1)(x-1) \\ \partial_y f = 16y - 4y^3 = -4y(y+2)(y-2) \end{cases} \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x \in \{0,\,1,\,-1\} \\ y \in \{0,\,2,\,-2\} \end{cases}$$

perciò vi sono 9 punti stazionari. Osserviamo che f è pari sia rispetto a x che a y, quindi ci basta esaminare i punti stazionari del primo quadrante che sono $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ e $(1,2)$. Calcoliamo la matrice hessiana di f che è

$$\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 16-12y^2 \end{pmatrix}$$

pertanto nei quattro punti indicati essa è

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$$

e visto che sono tutte matrici diagonali gli autovalori si leggono direttamente: la prima e l'ultima hanno autovalori di segno opposto e corrispondono a selle, la seconda è definita negativa e corrisponde a un massimo locale, e la terza è definita positiva e corrisponde a un minimo. In conclusione

$(0,0)$ e $(\pm1,\pm2)$	sono punti di sella
$(0,\pm2)$	sono punti di massimo locale
$(\pm1,0)$	sono punti di minimo locale.

Per completezza calcoliamo

$$f(0,0) = 1\ , \qquad f(\pm1,\pm2) = 16\ , \qquad f(0,\pm2) = 17\ , \qquad f(\pm1,0) = 0\ .$$

Per quanto riguarda Q, che è compatto dato che è limitato ed è intersezione di tre chiusi, la funzione continua f assume certamente massimo e minimo. Anche se appartengono a Q, nessuno dei punti stazionari trovati è iall' interno di Q, dunque gli estremi di f si trovano sul bordo. Questo è composto dai due segmenti

$$A = \{(0,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{5}\}\ , \quad B = \{(x,0) : 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$$

e dall'arco di circonferenza

$$C = \{x = \sqrt{5-y^2} : 0 \leq y \leq \sqrt{5}\}\ .$$

Leggendo la funzione su A abbiamo

$$f(0,y) = 1 + 8y^2 - y^4 = g_A(y)$$

e dato che $g'_A(y) = -4y(y+2)(y-2)$ la funzione g_A cresce per $0 \le y \le 2$ e decresce per $2 \le y \le \sqrt{5}$. Abbiamo

$$g_A(0) = 1 \ , \qquad g_A(2) = 17 \ , \qquad g_A\big(\sqrt{5}\,\big) = 16 \ .$$

Invece su B

$$f(x,0) = (x^2-1)^2 = g_B(x)$$

e la funzione g_B decresce per $0 \le x \le 1$ e cresce poi. Sappiamo che $g_B(0) = f(0,0) = g_A(0)$, poi abbiamo

$$g_B(1) = 0 \ , \qquad g_B\big(\sqrt{5}\,\big) = 16 \ .$$

Per quanto riguarda C sostituendo x^2 con $5 - y^2$ abbiamo

$$f(\sqrt{5-y^2}, y) = (y^2-4)^2 + 8y^2 - y^4 = 16 \ ,$$

ovvero f è costante su C . In conclusione il massimo di f su Q è 17 ed è raggiunto in $(0,2)$, mentre il minimo è 0 ed è raggiunto in $(1,0)$.

PROBLEMA 5

Considerate l' insieme

$$\boldsymbol{A = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq x + y\} \ .}$$

a) **Descrivete A e disegnatelo.**
b) **Calcolate $\int_A xy\,dx\,dy\,dz$.**
c) **Descrivete l' insieme**

$$\boldsymbol{B = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq x + y - 1\} \ ,}$$

disegnatelo e calcolatene il volume.

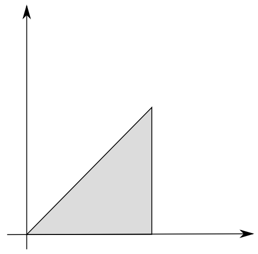
Il sottoinsieme

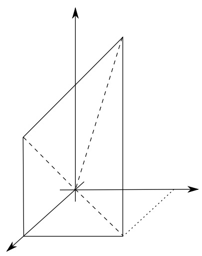
$$T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

del piano x, y , a sinistra in figura, è un triangolo, di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Allora l' insieme

$$P = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq x \leq 1 \ , \ z \in \mathbb{R}\}$$

è un prisma a base triangolare, con asse parallelo all'asse z e spigoli che passano per $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$, ed A è la parte di tale prisma che sta sopra al piano $z = 0$ e sotto al piano $z = x + y$, a destra in figura.





Dato che per $(x, y) \in T$ è sempre $x + y \geq 0$, il piano $z = x + y$ sta (nella zona che ci interessa) sempre al di sopra del piano $z = 0$. Allora A è il poliedro che ha vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$ sul piano $z = 0$ e vertici $(0,0,0)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,2)$ sul piano $z = x + y$. Dato che sulla proiezione T le sezioni sono i fili $0 \leq x \leq x + y$, abbiamo

$$\int_A xy\,dx\,dy\,dz = \int_T xy \left(\int_0^{x+y} dz \right) dx\,dy = \int_T xy(x+y)\,dx\,dy \ .$$

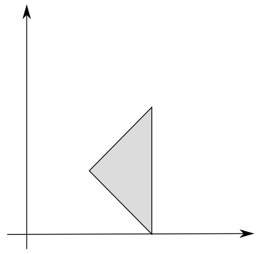
A sua volta

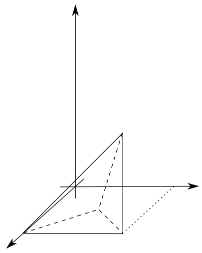
$$\begin{aligned} \int_T (x^2 y + x y^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 y + x y^2)\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x y^3}{3} \Big]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{5x^4}{6}\,dx = \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

L' insieme B si ottiene abbassando A di 1 , ma considerando solo la parte che sporge al di sopra del piano $z = 0$. Visto che il piano $z = x + y - 1$ interseca il piano $z = 0$ nella retta che passa per $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, la proiezione di B sul piano x, y è il triangolo

$$T' = \{(x, y) : 0 \le y \le x \le 1 \ , \ x + y - 1 \ge 0\}$$

di vertici $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(1/2, 1/2)$, e l' insieme B è la piramide che ha la base con vertici in $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1/2, 1/2, 0)$ e vertice in $(1, 1, 1)$, a sinistra in figura, dunque (dato che l'area di T' è $1/4$ e l'altezza è 1) l' insieme B , a destra in figura, ha volume $1/12$.





PROBLEMA 6

Considerate il problema di Cauchy

$$y'' + y' - 2y = x\,\mathrm{e}^x + 1\ , \qquad y(0) = 3/2\ , \quad y'(0) = -10/9\ .$$

a) Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
b) Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.
c) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

L'equazione caratteristica è $z^2 + z - 2 = 0$, e ha soluzioni $z = 1$ e $z = -2$, quindi le soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea sono

$$\mathrm{e}^x\ , \qquad \mathrm{e}^{-2x}$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}\ .$$

Al secondo membro abbiamo una somma, fra la funzione 1 e la funzione $x\,\mathrm{e}^x$, perciò cerchiamo due soluzioni particolari; la prima è facile, $y_1(x) \equiv -1/2$ dà $y'' + y' - 2y = 1$. Per l'altra cerchiamo una funzione della forma $y_2(x) = p(x)\,\mathrm{e}^x$ con p polinomio: abbiamo

$$y_2' = (p + p')\,\mathrm{e}^x\ , \quad y_2'' = (p + 2p' + p'')\,\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y_2'' + y_2' - 2y_2 = (p'' + 3p')\,\mathrm{e}^x\ .$$

Se vogliamo che questo sia $x\,\mathrm{e}^x$ occorre che $p'' + 3p' = x$: dato che p'' ha grado inferiore a p' occorre che p' abbia grado 1 e quindi p abbia grado 2:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'' + 3p' = 6ax + (3b + 2a)$$

dunque serve che

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 3b + 2a = 0 \end{cases} \iff a = \frac{1}{6}\ ,\ b = -1/9$$

e quindi $p(x) = x^2/6 - x/9$ e $y_2(x) = (x^2/6 - x/9)\,\mathrm{e}^x$, così una soluzione particolare dell'equazione data è

$$\bar{y}(x) = (x^2/6 - x/9)\,\mathrm{e}^x - 1/2$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2/6 - x/9)\,\mathrm{e}^x - 1/2\ .$$

Abbiamo $y(0) = c_1 + c_2 - 1/2$ e

$$y'(x) = c_1\,\mathrm{e}^x - 2c_2\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2/6 - 2x/9 - 1/9)\,\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = c_1 - 2c_2 - 1/9\ ,$$

quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 1/2 = 3/2 \\ c_1 - 2c_2 - 1/9 = -10/9 \end{cases} \iff c_1 = c_2 = 1$$

e la soluzione del problema di Cauchy è

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x} + (x^2/6 - x/9)\,\mathrm{e}^x - 1/2\ .$$