Risoluzione del compito n. 1 (Febbraio 2017/1)

PROBLEMA 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

a) **Descrivete gli insiemi di livello di f .**
b) **Dopo aver spiegato perché esistono, determinate minimo e massimo di f su**

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} .$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x, y, z) = x + y^2 + \frac{2}{3}z^3.$$

c) **Determinate gli eventuali punti stazionari di g in $\mathbb{R}^3$.**
d) **Determinate minimo e massimo di g su B .**

Gli insiemi di livello di f sono i piani, paralleli tra di loro, con equazione $x + y + z = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, tutti ortogonali a $(1, 1, 1)$.
Massimo e minimo sul compatto (infatti, chiuso e limitato) B esistono per il Teorema di Weierstrass: difatti f è una funzione continua su $\mathbb{R}^3$. Intanto B è simmetrico (è la sfera unitaria) e $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$, quindi il minimo sarà l'opposto del massimo. Dalla caratterizzazione degli insiemi di livello, segue che

$$\sup_B f = \max_B f = \sup\{k \in \mathbb{R} : \text{il piano } x + y + z = k \text{ interseca } B\}.$$

Non è difficile mostrare che tale massimo è $\sqrt{3}$ ed è realizzato in corrispondenza del punto $M = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$: infatti il piano tangente in M alla palla è un insieme di livello di f , dato che ha equazione $x+y+z = \sqrt{3}$, e lascia la palla tutta da una parte, dunque gli altri piani paralleli di equazione $x + y + z = k$ con $k > \sqrt{3}$ non intersecano B .
Un metodo alternativo per trovare massimo (e quindi minimo) consiste nell'utilizzare i moltiplicatori di Lagrange. Difatti $Df(x, y, z) = (1, 1, 1)$ e quindi f non ha punti stazionari nell'interno di B . Ci riduciamo a cercare massimi e minimi sulla sua frontiera, cioè sull' insieme $\{h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Il sistema di Lagrange è

$$\begin{cases} ((1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

da cui subito $x = y = z$ e quindi, dato che il punto deve appartenere a B , i due soli candidati sono M e $-M$ definiti sopra. In corrispondenza di M abbiamo il massimo e in corrispondenza di $-M$ il minimo.
Il gradiente di g è $Dg(x, y, z) = (1, 2y, 2z^2)$ che non si annulla mai. Quindi g non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^3$. Grazie a ciò, per l'ultimo punto è sufficiente cercare i punti di

massimo e minimo su $\partial B = \{x^2+y^2+z^2-1=0\}$. Possiamo sostituire $y^2 = 1-x^2-z^2$ nell'espressione di g e il problema diventa equivalente a trovare massimi e minimi di

$$\tilde{g}(x,z) = x+1-x^2-z^2+\frac{2}{3}z^3 \qquad \text{su} \qquad D = \{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \le 1\}$$

che è la proiezione di B sul piano (x,z) . Abbiamo $D\tilde{g}(x,z) = (1-2x, 2z(z-1))$ che si annulla in

$$Q_1 = \Big(\frac{1}{2},0\Big), \qquad Q_2\Big(\frac{1}{2},1\Big);$$

dato che solo $Q_1 \in D$, calcoliamo il corrispondente valore: $\tilde{g}(Q_1) = 5/4$. Per concludere, dobbiamo ancora studiare $\tilde{g}$ su $\partial D = \{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2 = 1\}$, ma su questa circonferenza

$$\tilde{g}(x,z) \equiv \bar{g}(x,z) = x+\frac{2}{3}z^3 \ .$$

Applicando i moltiplicatori di Lagrange cerchiamo le soluzioni (x,z) di

$$\begin{cases} (1,2z^2) = \lambda(2x,2z) \\ x^2+z^2 = 1 \ . \end{cases}$$

Dalla prima riga otteniamo che o $z=0$ o $xz = 1/2$; nel primo caso abbiamo i punti

$$Q_3 = (1,0), \qquad Q_4 = (-1,0)$$

mentre nel secondo abbiamo $x^2+z^2 = 1 = 2xz \Rightarrow (x-z)^2 = 0$ e ricaviamo i punti

$$Q_5 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \qquad Q_6 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \ .$$

I valori corrispondenti sono $\bar{g}(Q_3) = 1 = -\bar{g}(Q_4)$, $\bar{g}(Q_5) = 2\sqrt{2}/3 = -\bar{g}(Q_6)$. Osserviamo che $\sqrt{2} < 1.5$ quindi $2\sqrt{2}/3 < 1 < 5/4$, pertanto il minimo cercato è -1 e il massimo $5/4$, realizzati rispettivamente nei punti di $\mathbb{R}^3$ (che dobbiamo ricostruire usando $y^2 = 1-x^2-z^2$)

$$P_4 = (-1,0,0) \ , \qquad P_1, P_1' = (1/2, \pm\sqrt{3}/2, 0) \ .$$

Tornando ai punti in $\mathbb{R}^3$ e alla funzione g i punti di massimo e minimo (e i rispettivi valori) sono quindi

$$g\Big(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\Big) = g\Big(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\Big) = \frac{5}{4}, \qquad g(-1,0,0) = -1.$$

In alternativa, i punti stazionari su ∂B possono essere trovati risolvendo

$$(1,2y,2z^2) + 2\lambda(x,y,z) = (0,0,0)$$

intersecato con l'equazione del vincolo $x^2+y^2+z^2 = 1$. I risultati ovviamente sono gli stessi e i calcoli sono, anch'essi, essenzialmente gli stessi fatti nella risoluzione precedente.

PROBLEMA 2

Posto $\mathbb{R}^2_+ =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, considerate il cambiamento di variabili

$$(s,t) = \boldsymbol{\Phi}(x,y)$$

dove $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ è data da

$$s = \sqrt{x^2+y}\,, \quad t = \frac{y}{x^2}\,.$$

a) **Scrivete il cambiamento di variabili inverso $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ e calcolate il determinante della matrice jacobiana di $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$.**

b) **Disegnate l'insieme**

$$E = \{(x,y) : x > 0\,,\ x^2 \le y \le 2x^2\,,\ 1-x^2 \le y \le 2-x^2\}$$

e calcolatene l'area.

Per trovare l'inversa di $\boldsymbol{\Phi}$ ricaviamo dai valori di $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$ quelli di $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ nel sistema

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y} \\ t = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} s^2 = x^2+y \\ y = tx^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{s^2}{1+t} \\ y = \dfrac{ts^2}{1+t} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{s}{\sqrt{1+t}} \\ y = \dfrac{ts^2}{1+t}\,. \end{cases}$$

Dunque

$$(x,y) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s,t) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+t}}\,,\ \frac{ts^2}{1+t}\right).$$

Allora la matrice Jacobiana di $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ è

$$D\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}} & -\dfrac{s}{2(1+t)^{3/2}} \\ \dfrac{2st}{1+t} & \dfrac{s^2}{(1+t)^2} \end{pmatrix}$$

pertanto

$$\det D\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s,t) = \frac{s^2}{(1+t)^{3/2}}\,.$$

Osserviamo che $E \subset \mathbb{R}^2_+$ si scrive benissimo nelle coordinate (s,t) dato che se $(x,y) = \boldsymbol{\Phi}(s,t)$ allora

$$(x,y) \in E \iff \begin{cases} 1 \le \dfrac{y}{x^2} \le 2 \\ 1 \le x^2+y \le 2 \end{cases} \iff 1 \le t \le 2\,,\ 1 \le s \le \sqrt{2}\,.$$

Posto

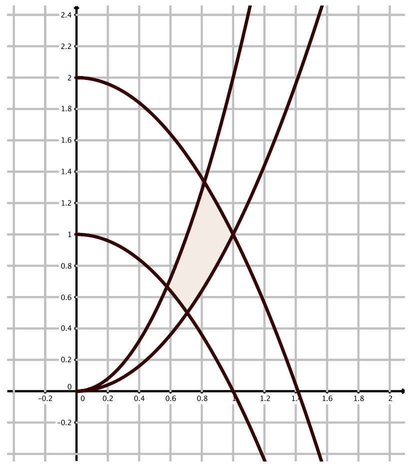
$$Q = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2_+ : 1 \le s \le \sqrt{2}\,,\ 1 \le t \le 2\}$$

abbiamo dunque $Q = \mathbf{\Phi}(E)$ ed $E = \mathbf{\Phi}^{-1}(Q)$, pertanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(E) &= \int_E 1\,dx\,dy = \int_{\mathbf{\Phi}^{-1}(Q)} 1\,dx\,dy \underset{(x,y)=\mathbf{\Phi}^{-1}(s,t)}{\overset{}{=}} \int_Q 1 \cdot \frac{s^2}{(1+t)^{3/2}}\,ds\,dt \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} s^2 \Big(\int_1^2 (1+t)^{-3/2}\,dt \Big) ds = \int_1^{\sqrt{2}} s^2\,ds \cdot \int_1^2 (1+t)^{-3/2}\,dt \\
&= \Big[\frac{s^3}{3} \Big]_1^{\sqrt{2}} \cdot \Big[-2(1+t)^{-1/2} \Big]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \cdot \Big(-\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \Big)
\end{aligned}$$

che si può variamente riscrivere

$$\cdots = \frac{4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{3\sqrt{3}} = \cdots$$



PROBLEMA 3

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y''(x) + \dfrac{y'(x)}{1+x} = x^2} \\ \\ \boldsymbol{y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\ .} \end{cases}$$

Osserviamo intanto che l'equazione non ha senso in $x = -1$ dunque il dominio massimale della soluzione sarà contenuto in uno dei due intervalli $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$; siccome il dato iniziale è in $x = 0$ la soluzione non potrà essere definita più che in $]1, +\infty[$, dunque d'ora in poi potremo supporre $x > -1$. Se poniamo $v(x) = y'(x)$, dall'equazione differenziale data ricaviamo che

$$v'(x) + \frac{1}{1+x} v(x) = x^2\ ,$$

un'equazione lineare del primo ordine. Ora potremmo: 1) applicare la formula risolutiva generale, oppure 2) pensare a una primitiva del coefficiente di $v(x)$ e moltiplicare tutto per l'esponenziale della primitiva, oppure 3) accorgerci (riottenendo il modo 2 a mano) che se moltiplichiamo per $(1+x)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (1+x)v'(x) + v(x) = x^2 + x^3 \iff & \Big((1+x)v(x)\Big)' = x^2 + x^3 \\ \iff & (1+x)v(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c \end{aligned}$$

da cui, ricordando che deve essere $v(0) = y'(0) = 0$,

$$v(x) = \frac{1}{1+x}\Big(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big) = \frac{4x^3 + 3x^4}{12(1+x)}\ .$$

Allora questa è l'espressione di $y'(x)$, quindi ne cerchiamo una primitiva; dato che è una funzione razionale, intanto dividiamo il numeratore per $1 + x$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 3 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

ossia

$$\frac{3x^4 + 4x^3}{1+x} = 3x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}\ .$$

Allora ricordando che abbiamo $x > -1$ ossia $x + 1 > 0$

$$\int \frac{3x^4 + 4x^3}{1+x}\,dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log(1+x) + c$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{12}\Big(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log(1+x)\Big) + c$$

per qualche valore di c. Ma da $y(0) = 1$ si ha $c = 1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{24} + \frac{x - \log(1+x)}{12} + 1\ .$$

PROBLEMA 4

Studiate convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}} \ .$$

Non c'è molto da dire sulla convergenza puntuale: $f_n(0) \equiv 0$, e per ogni $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} = \frac{x}{(1/2^n\,) + nx^2} \to 0$$

pertanto $f_n \xrightarrow{\text{pt}} 0$ su $\mathbb{R}$.

Dato che f_n è dispari, possiamo limitarci ad esaminare che accade per $x \geq 0$. Abbiamo

$$f_n(0) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

e

$$f_n'(x) = \frac{2^n}{(1 + n2^n x^2)^2}(1 - n2^n x^2)$$

per cui $f_n|_{[0,+\infty[}$ cresce in $[0\,,\ 1/\sqrt{n2^n}\,]$ e decresce in $[1/\sqrt{n2^n}\,,\ +\infty[$, ha minimo in zero e massimo in $1/\sqrt{n2^n}$. Tale massimo vale

$$f(1/\sqrt{n2^n}\,) = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$$

per cui ricordando che f_n è dispari

$$\max_{\mathbb{R}} f_n = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}\ , \qquad \min_{\mathbb{R}} f_n = -\frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}\ .$$

Allora f_n non converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione zero, dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n - 0| = \lim_{n\to+\infty} \max f_n = +\infty\ .$$

Possiamo però vedere che si ha convergenza uniforme sugli insiemi che non si avvicinano allo zero, precisamente su quelli della forma

$$E =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty]$$

per qualche $a > 0$; se mostriamo che c'è convergenza uniforme su $[a, +\infty[$ — e quindi anche sul simmetrico — la convergenza è uniforme su E . Ora, per n abbastanza grande il punto di massimo di f_n cade fra zero ed a , dato che

$$\frac{1}{\sqrt{n2^n}} \to 0\ ,$$

dunque per $n \geq \bar{n}$ la funzione f_n è decrescente (e positiva) su $[a, +\infty[$ e quindi

$$\sup_{[a,+\infty[} |f_n - 0| = f_n(a) \to 0$$

per la convergenza puntuale già vista, quindi $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ su $[a, +\infty[$ e dunque su E .