Risoluzione del compito n. 2 (Giugno 2016/2)

PROBLEMA 1

Una soluzione di $y'' + 4y = x$ è (cerchiare la risposta esatta)

$$y_1(x) = x/4 \qquad y_2(x) = \operatorname{sen}(2x) + x$$

$$y_3(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) - 1 \qquad y_4(x) = x - 2\operatorname{sen} x\ .$$

Le funzioni $\operatorname{sen}(2x)$ e $\cos(2x)$ hanno derivata seconda uguale a meno quattro volte la funzione, quindi

$$y_2'' + 4y_2 = 4x\ , \qquad y_3'' + 4y_3 = -4\ .$$

Invece $y_4'' + 4y_4$ contiene il termine $\operatorname{sen} x$, dunque la soluzione corretta deve essere y_1: infatti

$$y_1'' + 4y_1 = 0 + 4\frac{x}{4} = x\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la curva $\phi(t) = (\operatorname{sen}(2t),\ 2\cos t,\ t^2 - t + 2)$. Nel punto $\phi(0)$ la retta tangente alla curva ha equazione parametrica ...., e il piano per $\phi(0)$ ortogonale alla retta tangente ha equazione ....

Abbiamo $\phi(0) = (0, 2, 2)$ e

$$\phi'(t) = (2\cos(2t),\ -2\operatorname{sen} t,\ 2t - 1) \quad \Rightarrow \quad \phi'(0) = (2, 0, -1)$$

per cui la retta passante per $(0, 2, 2)$ con vettore direzione $(2, 0, -1)$ ha equazione parametrica

$$\boldsymbol{X} = (0, 2, 2) + t(2, 0, -1)$$

mentre il piano per $(0, 2, 2)$ ortogonale a $(2, 0, -1)$ ha equazione

$$\big(\boldsymbol{X} - (0, 2, 2)\big) \cdot (2, 0, -1) = 0$$

ossia $2x - z = -2$.

PROBLEMA 3

La funzione $f(x, y) = 3xy - 2x + y^2$ ha un punto stazionario che è (cerchiare la risposta corretta)

di minimo locale di sella di massimo locale.

Abbiamo
$$\begin{cases} \partial_x f = 3y - 2 \\ \partial_y f = 3x + 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x, y) = 0 \iff x = -\frac{4}{9}\ ,\ y = \frac{2}{3}$$

ed effettivamente f ha un punto stazionario. Poi la matrice hessiana di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e ha sempre determinante negativo: questo dice che tutti gli eventuali punti stazionari sono selle (e in particolare se ci fossimo fidati del fatto che f aveva un punto stazionario, non sarebbe stato necessario cercarlo).

PROBLEMA 4

Considerate l' insieme

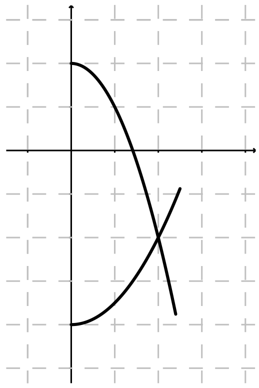
$$\boldsymbol{\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + x^2 + y^2 \le z \le 1 - 2(x^2+y^2),\ 0 \le x \le y\}\ .}$$

a) Disegnate $\boldsymbol{\Omega}$.

b) Calcolate $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{2(x+2y)z\,dx\,dy\,dz}$.

Intanto occupiamoci di $\Omega_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + x^2 + y^2 \le z \le 1 - 2(x^2+y^2)\}$: questo è un insieme simmetrico rispetto all'asse z , generato dalla rotazione della figura del piano (r,z)

$$S = \{(r,z) : r^2 - 2 \le z \le 1 - 2r^2,\ r \ge 0\}\ .$$



Le due parabole di equazioni $z = r^2 - 2$ e $z = 1 - 2r^2$ si intersecano per $r = 1$, quindi alla quota $z = -1$. Del solido Ω_0 dobbiamo poi considerare solo una parte, quella con $0 \le x \le y$ ossia quella che sta sopra all'ottavo di cerchio del piano (x,y) corrispondente in coordinate polari a $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. In coordinate cilindriche l' insieme Ω è determinato dunque dalle condizioni

$$\pi/4 \le \theta \le \pi/2\ , \quad 0 \le r \le 1\ , \quad r^2 - 2 \le z \le 1 - 2r^2$$

e possiamo impostare direttamente l' integrale, senza scordarci dello jacobiano:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int_{r^2-2}^{1-2r^2} 2r^2(\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta) z\,dz\Big) d\theta\Big] dr \\
&= \int_0^1 \Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2r^2(\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta) \Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{r^2-2}^{1-2r^2} d\theta\Big) dr \\
&= \int_0^1 \Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3(r^6 - r^2)(\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta\Big) dr \\
&= \int_0^1 3(r^6 - r^2)\Big[\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos\theta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} dr \\
&= 3\Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big[\frac{r^7}{7} - \frac{r^3}{3}\Big]_0^1 = -\frac{4}{7}\Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\ .
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5

Considerate il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 9y = \operatorname{sen}(2x) + \cos(3x) \\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = -1\ . \end{cases}$

a) **Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.**

b) **Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.**

c) **Determinate la soluzione del problema di Cauchy.**

L'equazione caratteristica $z^2 + 9 = 0$ ha come radici $z = \pm 3\mathrm{i}$, quindi le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)\ , \qquad y_2(x) = \cos(3x)$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_O(x) = c_1 \operatorname{sen}(3x) + c_2 \cos(3x);\,.$$

Dato che il secondo membro è una somma, una soluzione particolare sarà la somma delle soluzioni particolari delle equazioni

$$y'' + 9y = \operatorname{sen}(2x) \qquad y'' + 9y = \cos(3x)\ . \tag{1}$$

Cerchiamo una soluzione particolare della prima nella forma

$$\bar{y}_1(x) = a \operatorname{sen}(2x) + b \cos(2x)\ \ :$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{y}_1' &= 2a \cos(2x) - 2b \operatorname{sen}(2x) \\ \bar{y}_1'' &= -4a \operatorname{sen}(2x) - 4b \cos(2x) \\ \bar{y}_1'' + 9\bar{y}_1 &= 5a \operatorname{sen}(2x) + 5b \cos(2x)\ . \end{aligned}$$

Allora deve essere $a = 1/5$ e $b = 0$, quindi

$$\bar{y}_1(x) = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(2x)\ .$$

Invece la seconda equazione in (1) ha come secondo membro una delle soluzioni fondamentali, perciò cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{y}_2(x) = ax \operatorname{sen}(3x) + bx \cos(3x)$: ora abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{y}_2' &= a \operatorname{sen}(3x) + b \cos(3x) + 3ax \cos(3x) - 3bx \operatorname{sen}(3x) \\ \bar{y}_2'' &= 6a \cos(3x) - 6b \operatorname{sen}(3x) - 9ax \operatorname{sen}(3x) - 9bx \cos(3x) \\ \bar{y}_2'' + 9\bar{y}_2 &= 6a \cos(3x) - 6b \operatorname{sen}(3x)\ . \end{aligned}$$

Allora deve essere $a = 1/6$ e $b = 0$, quindi

$$\bar{y}_2(x) = \frac{1}{6} x \operatorname{sen}(3x) \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{6} x \operatorname{sen}(3x)$$

e la soluzione genera cercata è

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_O(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{6}x\,\mathrm{sen}(3x) + c_1\,\mathrm{sen}(3x) + c_2\cos(3x)\ .$$

A questo punto calcoliamo

$$y(0) = c_2$$

da cui imponendo $y(0) = 0$ ricaviamo $c_2 = 0$, ed essendo

$$y'(x) = \frac{2}{5}\cos(2x) + \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{2}x\cos(3x) + 3c_1\cos(3x)$$

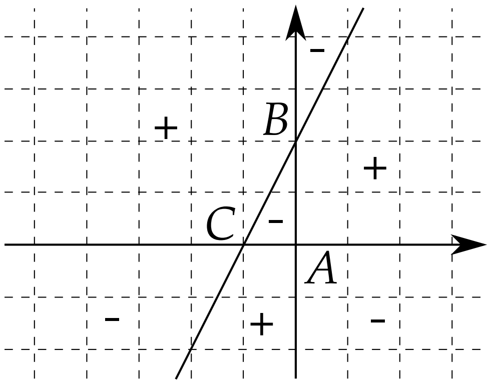
imponendo $-1 = y'(0) = 3c_1 + 2/5$ ricaviamo $c_1 = -7/15$. In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{6}x\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{7}{15}\,\mathrm{sen}(3x)\ .$$

PROBLEMA 6

Considerate la funzione $f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy$.
a) **Studiate il segno di f .**
b) **Individuate i punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$ e studiatene la natura.**
c) **Dite (giustificando la risposta) se f ha massimo e/o minimo su $\mathbb{R}^2$.**
d) **Determinate il massimo e il minimo di f sull'insieme $Q = \{(x,y) : 0 \le y \le 2 + x,\ x \le 0\}$.**

Dato che $f(x,y) = xy(2x+2-y)$ e che $2x+2-y > 0 \iff y < 2x+2$ ossia al di sotto della retta di equazione $y = 2x+2$, mentre il segno di x e quello di y sono ben noti, possiamo disegnare subito il diagramma col segno di f .



Sappiamo già che ci dovrà essere un punto di minimo locale nel triangolo $\boldsymbol{ABC}$ che si è venuto a formare, dato che all'interno f è negativa e sul bordo vale zero. Ci aspettiamo poi che i punti $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ siano di sella. Calcoliamo

$$\nabla f(x,y) = (4xy - y^2 + 2y,\ 2x^2 - 2xy + 2x) = \big(y(4x - y + 2),\ 2x(x - y + 1)\big) \ :$$

allora per trovare i punti stazionari dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y(4x - y + 2) = 0 \\ x(x - y + 1) = 0 \ . \end{cases}$$

Dalla prima equazione vediamo che si presentano due casi: o $y = 0$ o $y = 4x + 2$. Nel primo caso la seconda equazione diviene $x(x+1) = 0$, vale a dire o $x = 0$ o $x = -1$. Abbiamo trovato dunque i primi due punti stazionari, $(0,0) = \boldsymbol{A}$ e $(-1,0) = \boldsymbol{C}$. Nel secondo caso abbiamo $y = 4x + 2$ e la seconda equazione diviene $x(-3x - 1) = 0$, da cui o $x = 0$ (da cui $y = 2$) o $x = -1/3$ (da cui $y = 2/3$), e abbiamo trovato i restanti due punti stazionari $(0,2) = \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D} = (-1/3, 2/3)$; osserviamo che $\boldsymbol{D}$ cade all'interno del triangolo, e per l'ultimo punto calcoliamo già $f(\boldsymbol{D}) = -4/27$. Calcoliamo la matrice hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 2y + 2 \\ 4x - 2y + 2 & -2x \end{pmatrix}$$

per cui

$$D^2f(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D^2f(\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D^2f(\boldsymbol{C}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^2f(\boldsymbol{D}) = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

e dato che le prime tre matrici hanno determinante negativo, mentre l'ultima ha determinante e primo coefficiente positivi, si conferma quel che avevamo previsto, ossia $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ sono di sella e $\boldsymbol{D}$ di minimo locale.
Notiamo che sulla retta $y = x$ la funzione f vale $x^3 + 2x^2$, pertanto

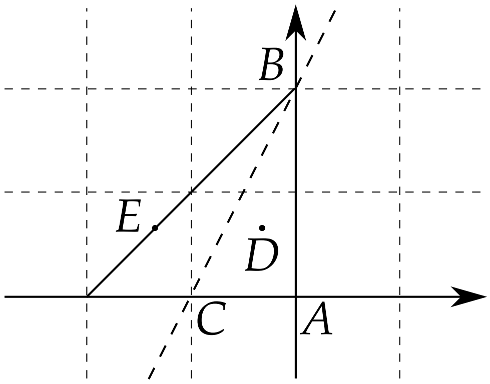
$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,x) = -\infty$$

da cui

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty\ , \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

ed f non può avere né massimo né minimo su $\mathbb{R}^2$.
Invece f è continua e Q è compatto, pertanto per il Teorema di Weierstraß f ha su Q sia massimo che minimo. Abbiamo già determinato i punti stazionari di f, dei quali solo $\boldsymbol{D}$ è interno a Q, e dobbiamo studiare f sul bordo di Q. Sui lati inferiore e destro la f si annulla, mentre sul lato obliquo abbiamo

$$f(x,y) = xy(2x+2-y) \Rightarrow f(x,x+2) = x^2(x+2) = g(x)\ , \qquad -2 \le x \le 0\ .$$



Dato che $g'(x) = 3x^2 + 4x = 3x(x + 4/3)$, la funzione g cresce per $x < -4/3$ e per $x > 0$, decresce per $-4/3 < x < 0$: nell'intervallo $[-2, 0]$ che dobbiamo considerare (agli estremi del quale g si annulla) la funzione g cresce fino a $-4/3$ e decresce poi, dumque ha minimo agli estremi e massimo per $x = -4/3$. Osservando che per $x = -4/3$ è $x + 2 = 2/3$ e che $g(-4/3) = 32/27$ ricaviamo che su Q la funzione f ha massimo nel punto $\boldsymbol{E} = (-4/3, 2/3)$ e minimo nel punto $\boldsymbol{D}$, e che

$$\max_Q f = \frac{32}{27}\ , \qquad \min_Q f = -\frac{4}{27}\ .$$