Risoluzione del compito n. 3 (Giugno 2017)

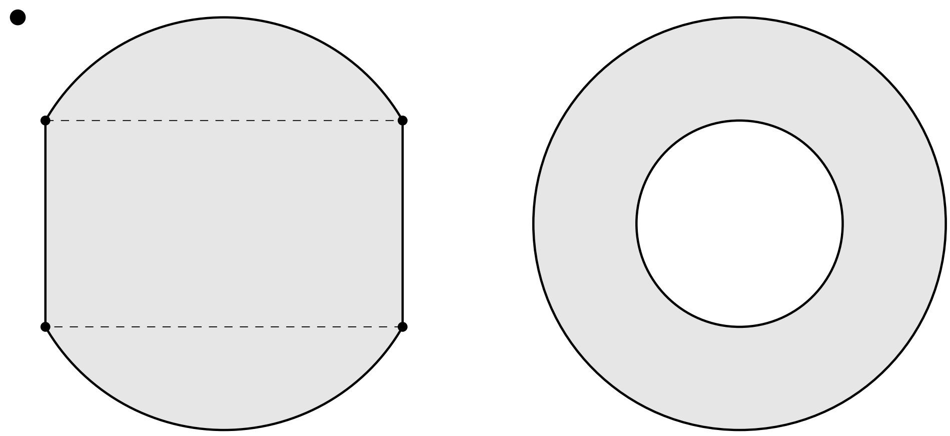
PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita su $\mathbb{R}^3$ da

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+2)^2}$$

e sia $P = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4\ ,\ y^2+z^2 \geq 1\}$.
a) Descrivete e disegnate l' insieme P .
b) Determinate e disegnate le proiezioni di P sul piano $\{z=0\}$ e sul piano $\{x=0\}$.
c) Descrivete gli insiemi di livello della funzione f .
d) Determinate il massimo e il minimo di f su P .
e) Calcolate il volume di P .
f) Dite se il bordo di P è o no una 2-superficie liscia, giustificando la risposta.

L' insieme P è una sfera (di raggio 2) con un foro cilindrico (di raggio 1) il cui asse passa per il centro della sfera (e coincide con l'asse x): una pallina per braccialetti. La proiezione di P sul piano $\{x=0\}$, che è ortogonale al foro, è molto facile, dato che è la corona circolare di raggio esterno 2 e interno 1 , centrata nell'origine. Invece per trovare l'altra proiezione dobbiamo vedere dove il cilindro interseca la sfera: questo accade sui due piani $\{x = \pm\sqrt{3}\}$, quindi la proiezione sul piano $\{z=0\}$ è data dai punti del cerchio di raggio 2 centrato nell'origine del piano (x,y) con $|x| \leq \sqrt{3}$.



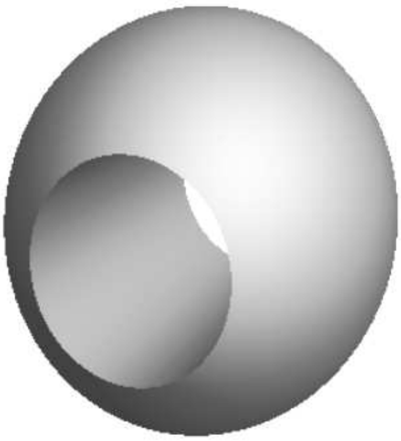
A sinistra la proiezione sul piano $\{z=0\}$ con il punto $(-2,2)$, a destra la proiezione su $\{x=0\}$.
La funzione f ha come insiemi di livello delle superfici cilindriche, con asse la retta $\{x=2,\ y=-2\}$, e il livello di f è il quadrato del raggio della superficie cilindrica corrispondente. Dato che f è indipendente da z , possiamo lavorare anziché su P sulla sua proiezione P_z sul piano (x,y) , e studiare anziché f la funzione $F(x,y)$ uguale

al quadrato della distanza da $(-2,2)$. Non c'è bisogno di fare conti per vedere che il minimo è nel punto $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e il massimo nel punto $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, e che i quadrati delle distanze (che sono dunque il minimo e il massimo di f su P) valgono rispettivamente

$$(2\sqrt{2}-2)^2 = 12-8\sqrt{2}\,, \qquad (2\sqrt{2}+2)^2 = 12+8\sqrt{2}\,.$$

Il bordo di P non è una 2-superficie liscia: infatti nei punti di ∂P che stanno solo sulla superficie della sfera c'è un piano tangente, e lo stesso nei punti che stanno solo sulla superficie del cilindro, ma nelle due circonferenze (quelle alle quote $x=\pm\sqrt{3}$) intersezione fra le due superfici non ci può essere un piano tangente. Infatti, preso uno di questi punti (per la simmetria della figura possiamo prendere $(\sqrt{3},1,0)$ senza ledere la generalità), se per assurdo supponiamo che ci sia un piano tangente (che ricordiamo essere generato da tutti i vettori tangenti alle curve che passano per quel punto e giacciono sulla superficie), se lo raggiungiamo con la curva $(t,1,0)$ con $t\le\sqrt{3}$ otteniamo che un vettore tangente dovrebbe essere $(1,0,0)$; se lo raggiungiamo con la curva $(\sqrt{4-t^2},t,0)$ con $t\ge 1$ otteniamo che un altro vettore tangente dovrebbe essere $(-1/\sqrt{3},1,0)$ e infine se lo raggiungiamo con $(\sqrt{3},\cos t,\operatorname{sen} t)$ otteniamo come altro vettore tangente dovrebbe essere $(0,0,1)$, ma questi tre vettori sono indipendenti e dunque generano tutto lo spazio e non solo un piano.
Calcoliamo infine il volume di P: integrando per strati ortogonali all'asse x abbiamo che per $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ la sezione corrispondente è una corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno $\sqrt{4-x^2}$, ma questa corona ha area $\pi(3-x^2)$, quindi

$$\mathrm{Vol}\,(P) = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\,dx = \pi\Big[3x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\pi\sqrt{3}\,.$$



PROBLEMA 2

Sia $R > 0$ e sia $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$. Sia poi $0 < \beta < \pi$ e sia S_β lo spicchio sferico

$$S_\beta = \{(x, y, z) \in B : z \ge (\cos\beta)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\}.$$

a) **Esprimete S_β in coordinate polari sferiche.**
b) **Calcolate il volume di S_β.**
c) **Scrivete un vettore normale esterno a B nel punto $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{6}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.**
d) **Scrivete due vettori indipendenti tangenti al bordo di B nel punto di coordinate $(R, 0, 0)$.**
e) **Calcolate la superficie totale di S_β.**

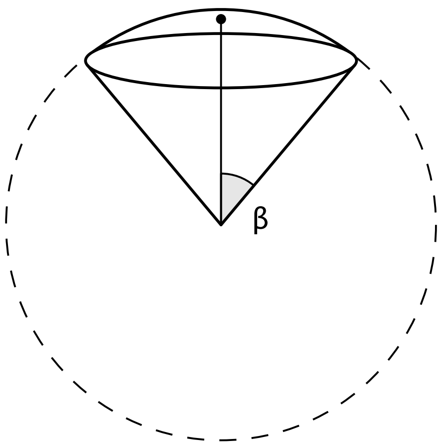
A parte l'origine, possiamo scrivere la condizione $z \ge (\cos\beta)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ come

$$\cos\beta \le \frac{z}{r}$$

dove r indica la distanza dall'origine. Ma allora usando le coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) dove ϕ indica l'angolo fra la semiretta dall'origine per (x, y, z) e il semiasse positivo delle z, la condizione diventa

$$\cos\beta \le \cos\phi$$

ossia $0 \le \phi \le \beta$.



Allora in coordinate sferiche l'insieme S_β si scrive

$$\{0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \beta\}.$$

Il determinante jacobiano della trasformazione è $r^2 \operatorname{sen}\phi$, quindi il volume di S_β è

$$\operatorname{Vol}(S_\beta) = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^\beta r^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\right)dr\right]d\theta = 2\pi\cdot\frac{R^3}{3}\cdot(1-\cos\beta)\ .$$

Dato che ∂B è il luogo di zeri di $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$, un vettore normale è multiplo di ∇g , quindi nel punto (x,y,z) va bene (x,y,z) e in particolare $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{6}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ in quello indicato. Invece nel punto $(R,0,0)$ un vettore normale è $(R,0,0)$ o anche $(1,0,0)$, quindi i vettori tangenti sono quelli ortogonali a quello normale, e possiamo scegliere ad esempio $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
Per calcolare la superficie totale di S_β , osserviamo che la sua superficie è costituita di una parte conica e una sferica. La parte conica ha apotema R e raggio di base $R\operatorname{sen}\beta$, quindi superficie $\pi R^2 \operatorname{sen}\beta$. Invece per la parte sferica dobbiamo calcolare un facile integrale. Ricordiamo che la superficie di cui calcolare l'area è l' immagine della trasformazione

$$\mathbf{\Phi} : [0,2\pi]\times[0,\beta]\to\mathbb{R}^3\ , \qquad \mathbf{\Phi}(\theta,\phi) = (R\operatorname{sen}\phi\cos\theta, R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, R\cos\phi)$$

alla quale compete la matrice jacobiana

$$\nabla\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & R\cos\phi\cos\theta \\ R\operatorname{sen}\phi\cos\theta & R\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -R\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

di cui dobbiamo calcolare la radice della somma dei quadrati dei determinanti dei minori 2×2 ottenendo

$$\sigma_2(\theta,\phi) = R^2\operatorname{sen}\phi\ .$$

Allora l'area della parte che ci interessa della superficie sferica è

$$R^2\int_0^\beta\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\, d\theta\right)d\phi = 2\pi R^2(1-\cos\beta)$$

e la superficie totale cercata è $\pi R^2(2-2\cos\beta+\operatorname{sen}\beta)$.

PROBLEMA 3

Trovate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (2t - 1)\,\mathrm{e}^{-t}$$

e fra tutte le soluzioni determinate quella per cui

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\ .$$

l polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\ ,$$

quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{t}\ .$$

Per trovare una soluzione particolare, o la cerchiamo in una forma simile al secondo membro o usiamo il metodo di variazione delle costanti. In uno o nell'altro modo troviamo

$$y_p(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-t}\ .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione saranno quindi, al variare di c_1 , c_2 in $\mathbb{R}$,

$$y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{t} + \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-t}\ .$$

Se $c_1 \neq 0$ il termine dominante è $c_1\,\mathrm{e}^{2t}$ e a seconda del segno di c_1 si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty\ .$$

Analogamente, se $c_1 = 0$ ma $c_2 \neq 0$ domina $c_2\,\mathrm{e}^{t}$ e si ha

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty\ ,$$

per cui l'unica soluzione che soddisfa $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ è quella con $c_1 = c_2 = 0$, ossia

$$y(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-t}\ .$$

PROBLEMA 4

Sia $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty[$ continua, non identicamente nulla, tale che $g(0) = 0$ e che $y \mapsto y^2 g(y)$ è limitata. Studiate la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_k(x) := g(kx), \quad x \geq 0$$

e studiate la convergenza puntuale, uniforme, totale della serie

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} g(kx), \quad x \geq 0 \; .$$

Dopo avere verificato che ogni f_k è sommabile in $[0, +\infty[$, dite se

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx$$

motivando la risposta.

Sia $C > 0$ tale che

$$y^2 g(y) \leq C, \quad y \geq 0 \; . \tag{1}$$

Per $y > 0$ si ha quindi $0 \leq g(y) \leq Cy^{-2}$, per cui $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$.
Per lo studio della convergenza puntuale, notiamo che per $x = 0$ si ha $f_k(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre per $x > 0$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} g(kx) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = 0 \; ,$$

quindi la successione converge puntualmente su $[0, +\infty[$ alla funzione f identicamente nulla. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si ha

$$\sup_{x\geq 0} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} g(kx) = \sup_{y\geq 0} g(y) \; .$$

L'ultimo estremo superiore è un numero positivo dato che g non è identicamente nulla; indipendentemente da quanto valga possiamo concludere che la convergenza non è uniforme in $[0, +\infty[$. Invece nelle semirette $[a, +\infty[$ con $a > 0$ si ha

$$\sup_{x\geq a} |f_k(x)| = \sup_{x\geq a} g(kx) = \sup_{y\geq ka} g(y) \leq \sup_{y\geq ka} \frac{C}{y^2} = \frac{C}{k^2 a^2} \; , \tag{2}$$

per cui la successione converge uniformemente alla funzione nulla in $[a, +\infty[$.
Per quanto riguarda la serie, converge ovviamente a 0 per $x = 0$, e per $x > 0$ la (1) implica $g(kx) \leq C(kx)^{-2}$. Dato che g ha valori non negativi, la serie converge per confronto con la serie $\sum C/k^2$.

La convergenza non è uniforme in $[0,+\infty[$ dato che si ha, per $m>n$,

$$\sup_{x\geq 0}|s_m(x)-s_n(x)| = \sup_{x>0}\sum_{k=n+1}^{m} g(kx) \geq \sup_{x>0} g(mx) = \sup_{y>0} g(y)$$

per cui non vale il criterio di Cauchy uniforme. Invece, per ogni $a>0$ si ha convergenza totale e quindi uniforme in $[a,+\infty[$, grazie alla stima (2).
Per quanto riguarda la domanda sugli integrali, la maggiorazione (1) implica che ogni f_k è sommabile su $[1,+\infty[$, e dato che è continua è sommabile su $[0,1]$. Di conseguenza è sommabile su $[0,+\infty[$. Non possiamo applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per due motivi; il primo è la mancanza di convergenza uniforme, il secondo il fatto che l'intervallo di integrazione è illimitato. Ciononostante, si trova

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0\ ,$$

e anche

$$\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} g(y)\,dy \to 0, \qquad \text{per } k\to+\infty\ ,$$

quindi si possono scambiare integrale e limite.