Risoluzione del compito n. 3 (Luglio 2016)

PROBLEMA 1

Se $\boldsymbol{E = \{(x,y) : y^2 < x < \sqrt{y^2+6}\,\}}$ allora (cerchiare la risposta corretta)

E non è connesso , $\qquad (\sqrt{7},1) \in E$, $\qquad (3,-\sqrt{3}\,)$ è di frontiera per E .

L' insieme E è una specie di lunetta con la gobba a sinistra, è aperto e connesso; il punto $(\sqrt{7},1)$ sta sul bordo sinistro della lunetta, quindi non sta in E , e il punto $(3,-\sqrt{3}\,)$ sta all'angolo inferiore della lunetta, ed è quindi sul bordo di E .

PROBLEMA 2

Il piano tangente al grafico di $\boldsymbol{f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y/(x+y^2)}$ in corrispondenza al punto $\boldsymbol{(x_0,y_0) = (-2,1)}$ ha equazione (cerchiare la risposta corretta)

$z = \mathrm{e}(y-1);$, $\qquad (\,\mathrm{e}, 6\,\mathrm{e}, -1) \cdot (x,y,z) = 2\,\mathrm{e}$, $\qquad \mathrm{e}y - z = -\,\mathrm{e}$.

Abbiamo $f(-2,1) = 2\,\mathrm{e}$, inoltre

$$\partial_x f = \frac{\mathrm{e}^y(x+y^2) - x\,\mathrm{e}^y}{(x+y^2)^2}\ , \quad \partial_y f = \frac{x\,\mathrm{e}^y(x+y^2) - 2xy\,\mathrm{e}^y}{(x+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(-2,1) = (\,\mathrm{e}, 6\,\mathrm{e}\,)$$

per cui il piano tangente ha equazione $z = 2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}(x+2) + 6\,\mathrm{e}(y-1) = -2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}x + 6\,\mathrm{e}y$, che si può riscrivere $(\,\mathrm{e}, 6\,\mathrm{e}, -1) \cdot (x,y,z) = 2\,\mathrm{e}$.

PROBLEMA 3

La funzione $\boldsymbol{y(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}}$ risolve solo due delle seguenti equazioni differenziali, la terza no: quale? (cerchiare quella che non è risolta da $\boldsymbol{y}$)

$y'' + 2y' + y = 0$, $\qquad y''' + 2y'' + y' = 0$, $\qquad y' - y = 2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Abbiamo $y' = (2-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$ e $y'' = (2x-4)\,\mathrm{e}^{-x}$ per cui $y'' + 2y' + y = 0$ per ogni x . Allora, senza fare ulteriori conti, $y''' + 2y'' + y' = (y'' + 2y' + y)' = 0$. Invece $y' - y = (2-4x)\,\mathrm{e}^{-x}$ e non $2\,\mathrm{e}^{-x}$.

PROBLEMA 4

Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x \log x} y + 2x \log x \ , \qquad y(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 \ .}$$

Si tratta di una equazione lineare del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$, in cui b è definita su $]0, +\infty[$ ma a solo su $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Dato che la condizione iniziale è per $x = \mathrm{e}$, la soluzione non potrà essere definita oltre $]1, +\infty[$. Abbiamo

$$\int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x \log x}\, dx = \log \log x + c$$

(niente valore assoluto dato che $x > 1$) per cui posto $A(x) = \log \log x$ riscriviamo l'equazione

$$y' - a(x)y = b(x) \qquad \mathrm{e}^{-A(x)}\big(y' - A'(x)y\big) = \mathrm{e}^{-A(x)} b(x) \qquad \Big(\mathrm{e}^{-A(x)} y\Big)' = \mathrm{e}^{-A(x)} b(x) \ .$$

Visto che $\mathrm{e}^{-A(x)} = 1/\log x$ l'equazione diventa

$$\left(\frac{y}{\log x}\right)' = 2x \iff \frac{y}{\log x} = x^2 + c \iff y = (x^2 + c) \log x$$

ma se vogliamo che $y(\mathrm{e}) = (\mathrm{e}^2 + c)$ valga e^2 serve $c = 0$ e la soluzione è $y(x) = x^2 \log x$.

PROBLEMA 5

Sia

$$\boldsymbol{K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\} \ .}$$

a) **Mostrate che K è un solido di rotazione, e disegnate l'insieme dalla cui rotazione è generato.**

b) **Calcolate $\displaystyle\int_K z^2 \, dx \, dy \, dz$.**

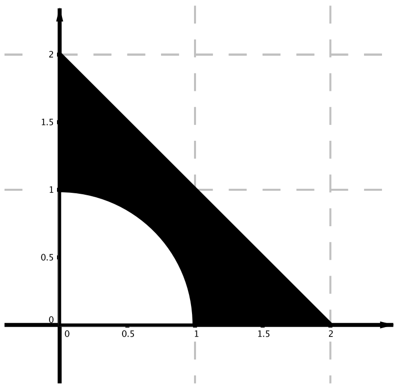
In coordinate cilindriche, con asse l'asse z, le condizioni diventano

$$z^2 + r^2 \geq 1 \ , \quad 0 \leq z \leq 2 - r$$

perciò K è effettivamente un solido di rotazione, generato dalla rotazione intorno all'asse z dell'insieme del piano (r, z)

$$K_0 = \{(r,z) : r \geq 0 \ , \ z^2 + r^2 \geq 1 \ \ 0 \leq z \leq 2 - r\}$$

rappresentato in figura



A questo punto calcoliamo l'integrale direttamente in coordinate cilindriche, osservando che per $0 \leq z \leq 1$ è $\sqrt{1-z^2} \leq r \leq 2 - z$ mentre per $1 \leq z \leq 2$ è $0 \leq r \leq 2 - z$ e ricordando che il determinante jacobiano vale r .

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Big[\int_{\sqrt{1-z^2}}^{2-z} \Big(\int_0^{2\pi} z^2 \cdot r \, d\theta\Big) dr\Big] dz + \int_1^2 \Big[\int_0^{2-z} \Big(z^2 \cdot r \, d\theta\Big) dr\Big] dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-z^2}}^{2-z} z^2 \cdot r \, dr\Big) dz + 2\pi \int_1^2 \Big(\int_0^{2-z} z^2 \cdot r \, dr\Big) dz = 2\pi(I_1 + I_2) \\
I_1 &= \int_0^1 z^2 \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{\sqrt{1-z^2}}^{2-z} dz = \int_0^1 \frac{3 - 4z + 2z^2}{2} z^2 \, dz = \int_0^1 \Big(\frac{3}{2}z^2 - 2z^3 + z^4\Big) dz \\
&= \Big[\frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 z^2 \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{2-z} dz = \int_1^2 \frac{4-4z+z^2}{2} z^2\, dz = \int_1^2 \Big(2z^2 - 2z^3 + \frac{z^4}{2}\Big) dz \\
&= \Big[\frac{2z^3}{3} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{10}\Big]_1^2 = \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + \frac{31}{10} = \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

per cui $I_1 + I_2 = 7/15$ ed $I = 14\pi/15$.

PROBLEMA 6

Considerate l'insieme $P = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2\}$ e la superficie C del cilindro di raggio 2 e asse passante per $(1,0,0)$ e parallelo all'asse z .

a) Descrivete e disegnate P , e scrivete l'equazione di C .

b) Provate che $P \cap C$ sta tutta su un piano, e trovate l'equazione del piano.

c) Provate che $P \cap C$ è una curva liscia, e scrivetene una parametrizzazione.

d) Trovate i punti di $P \cap C$ a massima e minima distanza dall'origine.

P è la superficie di un paraboloide circolare con asse l'asse z e vertice nell'origine; l'equazione cartesiana di C è $(x-1)^2 + y^2 = 4$.
Intersechiamo P e C :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 3 \end{cases}$$

perciò i punti di $P \cap C$ stanno tutti sul piano di equazione $2x - z + 3 = 0$, ortogonale al vettore $(2,0,-1)$ e passante per $(0,0,3)$.
Osservando la prima delle tre scritture in questa formula, si vede che per ogni coppia (x,y) che soddisfa la seconda equazione, grazie alla prima equazione si trova uno e un solo valore di z tale che $(x,y,z) \in P \cap C$. Dato che in $\mathbb{R}^2$ la seconda equazione rappresenterebbe una circonferenza, parametrizziamola e usiamo la prima equazione per parametrizzare anche z , quindi una parametrizzazione di $P \cap C$ è

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(t) &= \bigl(1 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, (1+2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2\bigr) \\ &= (1 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 5 + 4\cos t) \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

Dato che $(\phi_1')^2 + (\phi_2')^2 = 4$, il vettore $\boldsymbol{\phi}'$ non si annulla mai e $\boldsymbol{\phi}$ è iniettiva salvo agli estremi, quindi la curva è liscia. In alternativa, avremmo potuto procedere così: $P \cap C$ è l'intersezione dei due luoghi di zeri di $x^2 + y^2 - z$ e $(x-1)^2 + y^2 - 4$, quindi è la soluzione di

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{g}(x,y,z) = \bigl(x^2 + y^2 - z \ , \ (x-1)^2 + y^2 - 4\bigr) \ .$$

Ora la matrice jacobiana di $\boldsymbol{g}$ è

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 2(x-1) & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

e questa ha rango 1 solo se la seconda riga è interamente nulla, ma ciò accade solo se $x = 1$ e $y = 0$, e non vi sono punti di C che abbiano queste come prime coordinate.
Per il punto d) dato che

$$\boldsymbol{\phi}(t) = (1 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 5 + 4\cos t) \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

anziché minimizzare la distanza dall'origine, minimizziamo il suo quadrato

$$d_2(t) = (1 + 2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2 + (5 + 4\cos t)^2 = 16\cos^2 t + 44\cos t + 30$$

con $0 \le t \le 2\pi$: essendo

$$d_2'(t) = -32\operatorname{sen} t\cos t - 44\operatorname{sen} t = -4\operatorname{sen} t(8\cos t + 11)$$

e dato che $8\cos t + 11 > -8 + 11 = 3$ non si annulla mai, la derivata di d_2 si annulla solo dove $\operatorname{sen} t = 0$, ossia per $t = 0$ (e 2π) e per $t = \pi$. Per $t = 0$, che corrisponde al punto $(3,0,9)$, la distanza vale $\sqrt{d_2(0)} = 3\sqrt{10}$, mentre per $t = \pi$, che corrisponde al punto $(-1,0,1)$, la distanza è $\sqrt{2}$. Questi sono i punti cercati.