Risoluzione del compito n. 4 (Luglio 2017/1)

PROBLEMA 1

Siano

$$\boldsymbol{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}}\ , \qquad \boldsymbol{B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z| \le 1\}}\ .$$

a) **Descrivete e disegnate l'insieme A, determinatene l'area e calcolate l'integrale su A di x^2+y^2.**
b) **Descrivete e disegnate l'insieme B.**
c) **Determinate il volume di B.**
d) **Calcolate l'integrale su B di x^2+y^2.**

L'insieme A è un quadrato, di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, quindi ha lato $\sqrt{2}$ e area 2. Dato che A è simmetrico rispetto a x e y abbiamo $\int_A x^2\,dx\,dy = \int_A y^2\,dx\,dy$. Sfruttando la parità di x^2 e la simmetria di A rispetto agli assi abbiamo allora

$$\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_A x^2\,dx\,dy = 8\int_{A_1} x^2\,dx\,dy$$

dove A_1 è la parte di A nel primo quadrante. Ma

$$\int_{A_1} x^2\,dx\,dy = \int_0^1 x^2\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

perciò l'integrale su A di x^2+y^2 vale $8/12 = 2/3$.
L'insieme B è un ottaedro che ha per vertici i tre vettori della base canonica e i loro opposti. Per calcolarne il volume osserviamo che si tratta dell'unione di due piramidi uguali (la parte sopra e quella sotto al piano $z=0$), e che queste piramidi hanno base l'insieme A visto prima e altezza 1. Allora ciascuna piramide ha volume $2\cdot 1/3$ e B ha volume $4/3$. Per quanto riguarda l'integrale da calcolare, come prima possiamo valutare solo quello di x^2 e poi raddoppiarlo, e anzi detta B_0 la parte di B che sta nell'ottante $x\ge 0$, $y \ge 0$, $z\ge 0$ moltiplicare per $2\cdot 8 = 16$ l'integrale di x^2 su B_0, che ora calcoliamo: la proiezione Π_x di B_0 sull'asse x è $[0,1]$ e per ogni $x\in[0,1]$ la sezione S_x è un triangolo rettangolo isoscele, i cui cateti hanno lunghezza $1-x$. Allora tenuto conto che l'area di S_x è $(1-x)^2/2$

$$\begin{aligned}\int_{B_0} x^2\,dx\,dy\,dz &= \int_{\Pi_x} x^2\left(\int_{S_x} 1\,dy\,dz\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}\end{aligned}$$

per cui $\int_B x^2\,dx\,dy\,dz = 16/60 = 4/15$.

PROBLEMA 2

Siano

$$\boldsymbol{S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x \le 6\ ,\ x^2 - 6x - 2y^2 + 8y \ge 0\}\ , \quad f(x,y) = x\sqrt{6} - 3y\ .}$$

a) **Disegnate S .**
b) **Determinate il massimo e il minimo di f su S .**
c) **Scrivete un vettore normale e uno tangente al bordo di S nel punto di coordinate $(4,2)$.**

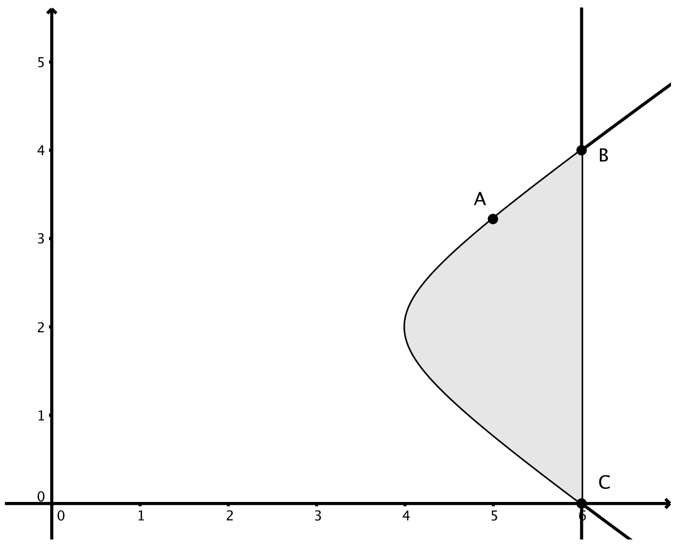
Scriviamo

$$x^2 - 6x - 2y^2 + 8y \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)^2 - 2(y-2)^2 \ge 1\ :$$

dato che

$$\xi^2 - 2\eta^2 = 1 \iff \xi^2 - \frac{\eta^2}{1/2} = 1$$

è l'equazione di una iperbole, e tenendo conto della condizione su x , l'insieme S è la parte a destra del ramo destro di una iperbole, traslata con centro di simmetria in $(3,2)$, per la sola porzione con $x \le 6$. Il suo vertice è in $(4,2)$ per cui possiamo subito rispondere all'ultima domanda, visto che un vettore normale è orizzontale, ad esempio $(1,0)$, e uno tangente è verticale, ad esempio $(0,1)$.



La funzione f è continua ed S compatto, quindi massimo e minimo devono esistere. Il gradiente di f non si annulla mai, perciò cerchiamo i punti stazionari sul bordo. Si possono usare sia i moltiplicatori di Lagrange che la lettura di f sulle due curve che compongono il bordo. Cominciamo leggendo f sul segmento verticale, ponendo

$$g(y) = f(6,y) = 6\sqrt{6} - 3y\ , \qquad 0 \le y \le 6\ :$$

senza fare nulla, g è decrescente, quindi sul segmento verticale f ha minimo in $(6,4)$ e massimo in $(6,0)$. L'arco di iperbole si parametrizza così: ricordando che $x \geq 3$,

$$\begin{aligned}(x-3)^2 - 2(y-2)^2 = 1 &\iff (x-3)^2 = 1 + 2(y-2)^2 \\ &\iff x - 3 = +\sqrt{1+2(y-2)^2} \\ &\iff x = 3 + \sqrt{1+2(y-2)^2}\ .\end{aligned}$$

Allora studiamo, sempre per $0 \leq y \leq 4$,

$$h(y) = f\big(3 + \sqrt{1+2(y-2)^2}, y\big) = 3\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{1+2(y-2)^2} - 3y\ .$$

Abbiamo

$$h'(y) = \sqrt{6}\frac{4(y-2)}{2\sqrt{1+2(y-2)^2}} - 3$$

quindi in $[0,4]$

$$h'(y) \geq 0 \iff \frac{2\sqrt{6}(y-2)}{\sqrt{1+2(y-2)^2}} \geq 3 \iff 2\sqrt{6}(y-2) \geq 3\sqrt{1+2(y-2)^2}\ .$$

Osserviamo che ciò è impossibile per $y < 2$, dunque per $y \in [0,2[$ certamente $h'(y) < 0$. Invece per $y \geq 2$ possiamo elevare al quadrato ambo i membri ottenendo

$$\cdots \iff 24(y-2)^2 \geq 9\big(1+2(y-2)^2\big) \iff 6(y-2)^2 \geq 9 \iff y - 2 \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

dove abbiamo usato un'altra volta che $y - 2 \geq 0$. In conclusione (notando che $3/2 < 4$ quindi $2+\sqrt{3/2}$ sta fra 2 e 4) h decresce in $[0, 2+\sqrt{3/2}]$, ha minimo per $y = 2+\sqrt{3/2}$ e cresce in $[2+\sqrt{3/2}, 4]$. Osserviamo che

$$y = 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow (y-2)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow (x-3)^2 = 1 + 2(y-2)^2 = 4 \Rightarrow x = 5$$

dato che $x \geq 3$. Allora, se poniamo

$$A = \left(5, 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \quad B = (6,4), \quad C = (6,0)$$

abbiamo che f, muovendosi da A e C sull'arco di iperbole, cresce; anche muovendosi da A a B sull'iperbole e poi da lì a C sul segmento cresce sempre. Dunque il minimo è in A e il massimo in C, e abbiamo

$$\max_S f = f(C) = 6\sqrt{6}\ , \qquad \min_S f = f(A) = 5\sqrt{6} - 6 - 3\sqrt{\frac{3}{2}} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{6} - 6\ .$$

Con i moltiplicatori di Lagrange avremmo avuto che ∇f non è mai ortogonale al segmento, quindi su di esso non vi sono punti stazionari (gli estremi B e C andranno comunque presi in considerazione, perché lì non si applica il teorema). Invece sull'arco di iperbole il sistema è

$$\begin{cases} (x-3)^2 - 2(y-2)^2 = 1\ , \quad x \geq 3 \\ \sqrt{6} = 2\lambda(x-3) \\ -3 = -4\lambda(y-2) \end{cases}$$

da cui, osservando che $\lambda(y-2) \neq 0$ per l'ultima equazione, ricavando λ dall'ultima e sostituendolo nella penultima otteniamo

$$\begin{cases} (x-3)^2 - 2(y-2)^2 = 1\ , \quad x \geq 3 \\ y-2 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(x-3) \end{cases}$$

che si risolve facilmente (specie se si continua a tenere in blocco $y-2$ e $x-3$) dando A come unico punto stazionario. I candidati sono solo A , B e C e si conclude confrontando i valori di f .

PROBLEMA 3

Risolvete il problema di Cauchy

$$\boldsymbol{y''(t) = y(t)y'(t)\ , \qquad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 1\ .}$$

Specificate il dominio e tracciate un grafico qualitativo della soluzione.

Osserviamo che l'equazione è del tipo $y'' = f(y, y')$ con f di classe $\mathcal{C}^\infty$, quindi il problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale. L'equazione si riscrive come

$$\frac{d}{dt}y'(t) = \frac{d}{dt}\frac{(y(t))^2}{2}$$

per cui

$$y'(t) = \frac{(y(t))^2}{2} + c$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$. Calcoliamo c imponendo le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$: otteniamo $c = 1$. Sostituiamo e risolviamo separando le variabili; si ottiene

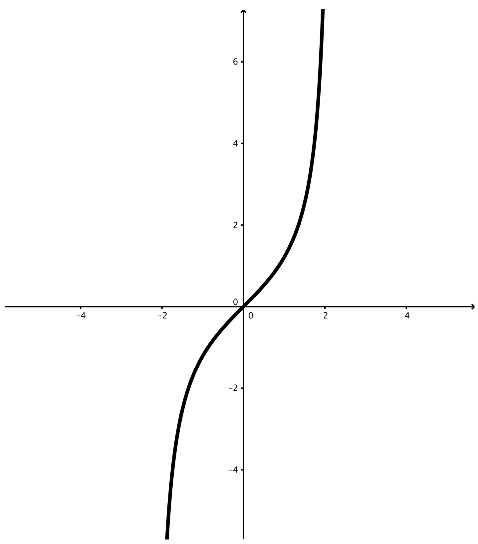
$$\frac{y'}{\frac{(y(t))^2}{2} + 1} = 1$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\sqrt{2}\arctan\Big(\frac{y}{\sqrt{2}}\Big) = 1$$

per cui, imponendo la condizione $y(0) = 0$,

$$y(t) = \sqrt{2}\tan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\ , \qquad t \in \Big(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\Big)\ .$$



PROBLEMA 4

Studiate la convergenza puntuale, uniforme, totale della serie di funzioni

$$\boldsymbol{s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} k\, \mathrm{e}^{-k(x^2+x+1)}}$$

e scrivete l'espressione analitica della somma della serie.

Poniamo $y = \mathrm{e}^{-(x^2+x+2)}$ e troviamo la serie di potenze di termine generale ky^k , che converge puntualmente in $(-1,1)$, e converge uniformemente e totalmente in ogni intervallo $[-a,a]$, con $0 \le a < 1$. Dato che $x^2+x+1 \ge 7/4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ne deduciamo che

$$0 < \mathrm{e}^{-(x^2+x+1)} \le \mathrm{e}^{-7/4} < 1 \,, \quad x \in \mathbb{R} \,,$$

quindi la serie di partenza converge totalmente in $\mathbb{R}$. Per calcolare la somma della serie, notiamo che, posto

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ny^n \,, \qquad F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y} \,, \quad -1 < y < 1 \,,$$

si ha

$$f(y) = y \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = yF'(y) = \frac{d}{dy}\big(yF(y)\big) - F(y) \,.$$

Se ne conclude che

$$f(y) = \frac{y}{(1-y)^2} \,, \quad -1 < y < 1 \,,$$

e se ne deduce

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{e}^{-k(x^2+x+1)} = \frac{\mathrm{e}^{-(x^2+x+1)}}{(1-\,\mathrm{e}^{-(x^2+x+1)})^2} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$