Risoluzione del compito n. 1 (Giugno 2016/1)

PROBLEMA 1

La curva definita su $[0,1]$ da $\phi(t) = (3t^2, 4t^3, -1)$ ha lunghezza (cerchiate la risposta corretta)

$$\frac{9}{8}\,, \qquad \frac{5\sqrt{5}-1}{2}\,, \qquad \frac{45\sqrt{5}-9}{8}\,, \qquad \frac{125-45\sqrt{5}}{2}\,.$$

Abbiamo $\phi'(t) = (6t, 12t^2, 0)$ per cui $\|\phi'(t)\| = 6|t|\sqrt{1+4t^2}$ e la lunghezza è

$$\int_0^1 6t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left[\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

PROBLEMA 2

Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ in corrispondenza al punto $(x_0, y_0) = (1,2)$ ha vettore normale (cerchiate la risposta corretta)

$$(6,-8,-1)\,, \quad (1,2,-1)\,, \quad (6,-8)\,, \quad (1,2,-5)\,.$$

Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (6x, -4y)$ per cui $\nabla f(1,2) = (6,-8)$. Un vettore normale al piano tangente è allora $(\nabla f, -1) = (6,-8,-1)$.

PROBLEMA 3

La soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = 2y$ è ...., mentre la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea $y' = 2y + 4x^2$ è ....

La prima equazione ha come soluzione fondamentale e^{2x} per cui la soluzione generale è $c\,e^{2x}$. Cerchiamo un polinomio di secondo grado $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ che risolve l'equazione completa: deve essere

$$y' = 2y + 4x^2 \iff 2\alpha x + \beta = 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma + 4x^2$$

per cui $\alpha = -2$, poi $\beta = -2$ e infine $\gamma = -1$. Allora una soluzione particolare è $-2x^2 - 2x - 1$ e la soluzione generale è $-2x^2 - 2x - 1 + c\,e^{2x}$.

PROBLEMA 4

Considerate il problema di Cauchy $\begin{cases} \boldsymbol{y'' - 2y' + 5y = \mathrm{sen}(2x)} \\ \boldsymbol{y(0) = y'(0) = 0\ .} \end{cases}$

a) **Determinate la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.**
b) **Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale.**
c) **Determinate la soluzione del problema di Cauchy.**

L'equazione caratteristica $z^2 - 2z + 5 = 0$ ha come radici $z = 1 \pm 2\mathrm{i}$, quindi le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \,\mathrm{sen}(2x)\ , \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^x \cos(2x)$$

e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_O(x) = \mathrm{e}^x \big(c_1 \,\mathrm{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)\big);.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = a \,\mathrm{sen}(2x) + b \cos(2x)$: abbiamo

$$\begin{aligned} y' &= 2a \cos(2x) - 2b \,\mathrm{sen}(2x) \\ y'' &= -4a \,\mathrm{sen}(2x) - 4b \cos(2x) \\ y'' - 2y' + 5y &= (a + 4b) \,\mathrm{sen}(2x) + (b - 4a) \cos(2x)\ . \end{aligned}$$

Allora deve essere $a = 1/17$ e $b = 4/17$, quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{\mathrm{sen}(2x) + 4\cos(2x)}{17}$$

e la soluzione generale cercata è

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_O(x) = \frac{\mathrm{sen}(2x) + 4\cos(2x)}{17} + \mathrm{e}^x \big(c_1 \,\mathrm{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)\big)\ .$$

A questo punto calcoliamo

$$y(0) = \frac{4}{17} + c_2$$

da cui imponendo $y(0) = 0$ ricaviamo $c_2 = -4/17$, e

$$y'(0) = \frac{2}{17} + 2c_1 + c_2 = 2c_1 - \frac{2}{17}$$

da cui $c_1 = 1/17$. In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{17}\Big(\mathrm{sen}(2x) + 4\cos(2x) + \mathrm{e}^x \,\mathrm{sen}(2x) - 4\,\mathrm{e}^x \cos(2x)\Big)\ .$$

PROBLEMA 5

Disegnate l' insieme

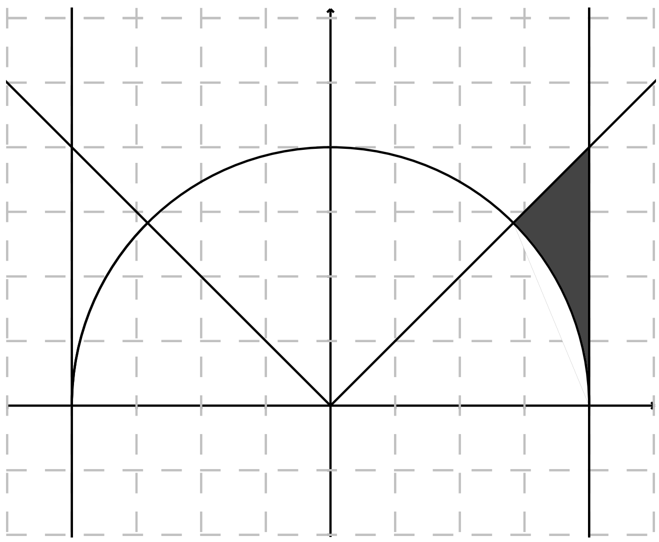
$$\boldsymbol{E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1,\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\}\ .}$$

a) **IMPOSTATE il calcolo del volume di E integrando per fili paralleli all'asse z .**

b) **IMPOSTATE il calcolo del volume di E integrando per strati perpendicolari all'asse z .**

c) **Calcolate $\int_E z\,dx\,dy\,dz$.**

La condizione $x^2 + y^2 \le 1$ dice che siamo dentro al cilindro di asse l'asse z e raggio 1 ; la condizione $z \ge \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ che siamo al di sopra della sfera di raggio 1 centrata nell'origine, che è tangente al cilindro alla quota $z = 0$ e ha come punto più alto $(0, 0, 1)$; infine la condizione $z \le \sqrt{x^2 + y^2}$ dice che siamo al di sotto di un cono, che ha vertice nell'origine interseca la superficie cilindrica alla quota $z = 1$. Il solido si ottiene dalla rotazione della figura nera (disegnata nel piano x, z) intorno all'asse z . Il cono e la sfera si intersecano quando $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}/2$.



Integrando per fili, la proiezione è la corona circolare $\sqrt{2}/2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 1$ e il volume è dato da

$$\int_{\{\sqrt{2}/2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}} \Big(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1\,dz \Big) dx\,dy\ ,$$

mentre integrando per strati la proiezione è $[0, 1]$ e la sezione è sempre una corona circolare di raggio esterno 1 , ma il cui raggio interno è $\sqrt{1 - z^2}$ per $z \le \sqrt{2}/2$, e diventa z per $z \ge \sqrt{2}/2$, quindi il volume è dato da

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \Big(\int_{\{\sqrt{1-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}} 1\,dx\,dy \Big) dz + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \Big(\int_{\{z \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}} 1\,dx\,dy \Big) dz\ .$$

Per calcolare l'integrale di z si può integrare in uno qualunque dei due modi; probabilmente, visto che la primitiva di z farà sparire le radici degli estremi di integrazione, è più conveniente integrare per fili e otteniamo

$$\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz = \Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} = x^2+y^2-\frac{1}{2}$$

da cui

$$\int_{\{\sqrt{2}/2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}}\Big(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\Big)dx\,dy = \int_{\{\sqrt{2}/2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}}\Big(x^2+y^2-\frac{1}{2}\Big)dx\,dy$$

e passando in coordinate polari piane

$$\cdots = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{\sqrt{2}/2}^{1}(r^2-1/2)r\,dr\Big)d\theta = 2\pi\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\Big(r^3-\frac{r}{2}\Big)dr = 2\pi\Big[\frac{r^4-r^2}{4}\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{\pi}{8}\ .$$

PROBLEMA 6

Dite quali sono gli insiemi di livello della funzione $f(x,y) = (x+1)^2 + (y-3)^2$ e quali quelli della funzione $g(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+3)^2$.

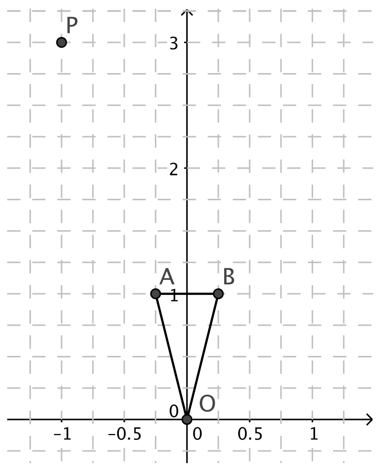
a) **Dopo aver disegnato $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4|x| \le y \le 1\}$, determinate il minimo e il massimo di f su T .**

b) **Dopo aver disegnato $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$, determinate i punti di C aventi massima e minima distanza da $(-1,0,3)$.**

Gli insiemi di livello di f sono circonferenze centrate in $(-1,3)$, mentre quelli di g sono superfici cilindriche con asse la retta $x = 1$, $y = -3$. L'insieme T è un triangolo chiuso, di vertici l'origine $\boldsymbol{O}$, il punto $\boldsymbol{A} = (-1/4, 1)$ e il punto $\boldsymbol{B} = (1/4, 1)$. Dato che la funzione f è il quadrato della distanza da $\boldsymbol{P} = (-1,3)$, col metodo delle curve di livello si vede subito che i punti di massimo e minimo (che esistono per il Teorema di Weierstraß) non possono essere interni al triangolo, e che i candidati sono solo i tre vertici e le proiezioni di $\boldsymbol{P}$ sui prolungamenti dei lati; queste si calcolano facilmente con della geometria elementare e sono tutte esterne a T , quindi i punti di massima e minima distanza si trovano fra i vertici. Facciamo invece i calcoli standard. Abbiamo

$$\nabla f = \big(2(x+1),\ 2(y-3)\big)$$

dunque l'unico punto stazionario di f è $\boldsymbol{P}$ che non appartiene a T .



Studiamo allora f sul bordo, e precisamente sui tre lati $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AO}$ e $\boldsymbol{OB}$, parametrizzati rispettivamente da

$$\boldsymbol{\phi}_1(t) = (t,1)\ , \quad -1/4 \le t \le 1/4\ , \qquad \boldsymbol{\phi}_2(t) = (t,-4t)\ , \quad -1/4 \le t \le 0\ ,$$
$$\boldsymbol{\phi}_3(t) = (t,4t)\ , \quad 0 \le t \le 1/4\ ,$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f\big(\boldsymbol{\phi}_1(t)\big) = 4 + (t+1)^2 \\ g_2(t) &= f\big(\boldsymbol{\phi}_2(t)\big) = 17t^2 + 26t + 10 \\ g_3(t) &= f\big(\boldsymbol{\phi}_3(t)\big) = 17t^2 - 22t + 10\ : \end{aligned}$$

si vede subito che g_1 è crescente su $[-1/4, 1/4]$, che g_2 decresce fino a $-13/17$ e cresce da lì in poi, dunque è crescente, e che g_3 decresce fino a $11/17$ e cresce da lì in poi, quindi è decrescente. Abbiamo dunque minimo in $\boldsymbol{A}$ e massimo in $\boldsymbol{O}$:

$$f(\boldsymbol{O}) = 10 \,, \quad f(\boldsymbol{A}) = 73/16$$

il minimo e il massimo cercati sono rispettivamente $73/16$ e 10.
Per quanto riguarda il secondo punto, si tratta di trovare i punti di massimo e minimo di

$$h(x, y, z) = (x + 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2$$

(poi faremo la radice del risultato) sull'insieme C, che è un cono di vertice l'origine, generato dalla rotazione del triangolo precedente intorno all'asse verticale (che ora è l'asse z).
Di nuovo il massimo e il minimo esistono per il teorema di Weierstraß, e il solo punto stazionario di h è $\boldsymbol{P} = (-1, 0, 3)$ che non sta in C, quindi studiamo h sul bordo di C, che è composto da due superfici bidimensionali (la faccia superiore e la parete del cono), una curva (la congiunzione delle due superfici) e un punto (l'origine). Il gradiente di h in $\boldsymbol{X} = (x, y, z)$ è

$$\nabla h(\boldsymbol{X}) = \big(2(x + 1), 2y, 2(z - 3)\big) = 2(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}) \,,$$

un vettore che punta da $\boldsymbol{X}$ in direzione opposta a $\boldsymbol{P}$. Cominciamo allora a studiare h sulla faccia superiore di C: per il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, negli eventuali punti stazionari interni a questa faccia il gradiente di h dovrebbe essere ortogonale alla faccia, cioè verticale, ma ciò accade solo nel punto $(-1, 0, 4)$ che non è interno alla faccia. Passando alla faccia laterale del cono, osserviamo che il vettore normale punta verso l'asse del cono (attenzione, non è orizzontale!), e per essere parallelo al gradiente di h occorre che anch'esso punti verso l'asse del cono. Ciò accade solo nei punti in cui $y = 0$, quindi gli eventuali massimi o minimi sulla faccia laterale del cono si trovano sull'intersezione della faccia con $y = 0$, vale a dire sui lati del triangolo di vertici $\boldsymbol{A} = (-1/4, 0, 1)$, $\boldsymbol{B} = (1/4, 0, 1)$ e $\boldsymbol{O}$. Inoltre su questo triangolo la funzione h coincide con $f(x, z) = (x+1)^2 + (z-3)^2$ e possiamo usare i risultati del punto precedente (così abbiamo studiato anche l'origine). Ci rimane solo da studiare h sulla circonferenza

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \big((1/4)\cos t, (1/4)\operatorname{sen} t, 1\big) \,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

e otteniamo

$$g(t) = h\big(\boldsymbol{\phi}(t)\big) = \frac{81}{16} + \frac{1}{2}\cos t \;:$$

allora i soli punti stazionari sulla circonferenza si hanno per $t = 0$ e $t = \pi$, riottenendo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. In conclusione il minimo e il massimo cercati sono $\sqrt{73}/4$ e $\sqrt{10}$, realizzati rispettivamente in $\boldsymbol{A}$ e in $\boldsymbol{O}$.
Si possono però usare tranquillamente i moltiplicatori di Lagrange sia sulla faccia superiore che sulla parete del cono, serve solo fare qualche conto in più.