Risoluzione del compito n. 2 (Febbraio 2017/2)

PROBLEMA 1

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il grafico della funzione $h(x,y) = (x-1)^2 - (y+1)^2 + 2$.
a) Provate che S è una 2-superficie liscia.
b) Scrivete un vettore normale ad S nel punto $\big(2,1,h(2,1)\big)$.
c) Scrivete due vettori indipendenti tangenti ad S nel punto $\big(3,2,h(3,2)\big)$.
d) Determinate i punti stazionari su S della funzione

$$f(x,y,z) = 2xy - 4y + z \,.$$

e) Determinate il massimo ed il minimo di f su

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in S : 0 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 4-x\} \,.$$

Dato che è il grafico di una funzione C^∞, l'insieme S è una superficie liscia. Difatti possiamo parametrizzare tutto S tramite la funzione

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = \big(x, y, h(x,y)\big)$$

che è iniettiva, di classe C^∞ e ha gradiente

$$\nabla\mathbf{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_x h(x,y) & \partial_y h(x,y) \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 in ogni punto.
I vettori normali al grafico nel punto $\big(x,y,h(x,y)\big)$ sono i multipli di

$$\big(\nabla h(x,y), -1\big) = \big(\partial_x h(x,y),\ \partial_y h(x,y),\ -1\big) = \big(2(x-1),\ -2(y+1),\ -1\big) \,.$$

In particolare per $(x,y) = (2,1)$ otteniamo i multipli di $(2,-4,-1)$.
Due vettori indipendenti appartenenti al piano tangente sono $\partial_x\mathbf{\Phi}$ e $\partial_y\mathbf{\Phi}$, le colonne di $\nabla\mathbf{\Phi}$, che nel punto $(3,2,-3)$ sono

$$(1,0,4) \qquad \text{e} \qquad (0,1,-6) \,.$$

Tutti gli altri vettori tangenti sono combinazioni di questi. In alternativa, si può trovare (come prima) un vettore normale, e poi determinare due vettori indipendenti ortogonali a quello normale.
Per trovare eventuali punti stazionari utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dato che il vincolo S è il luogo degli zeri della funzione

$$g(x,y,z) = (x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 - z \,;$$

dobbiamo cercare soluzioni in S del sistema $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, cioè

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda(x-1) \\ 2x - 4 = -2\lambda(y+1) \\ 1 = -\lambda \,. \end{cases}$$

Dato che $\lambda = -1$ il sistema si riduce a $x + y = 1$, $x - y = 3$ che ha soluzione $(x, y) = (2, -1)$, e dall'equazione del vincolo ricaviamo $z = 3$: l'unico punto stazionario di f su S è $(2, -1, 3)$.
Per studiare f su Σ , dato che l'unico punto stazionario di f su S non appartiene a Σ ci limitiamo a studiare la restrizione di f al bordo $\partial\Sigma$. Chiamiamo A il segmento che congiunge $(0, 0)$ con $(4, 0)$, B quello congiungente $(4, 0)$ con $(0, 4)$ e C quello da $(4, 0)$ a $(0, 0)$; il bordo di Σ è composto dalle immagini via h di questi tre segmenti. La restrizione di f ad $h(A)$, dove $y = 0$, ha espressione $g_A(x) = (x - 1)^2 + 1$, per $x \in [0, 4]$; si vede senza alcun calcolo che g ha un punto stazionario (minimo) in $x = 1$, cui corrisponde su Σ il punto $(1, 0, 1)$ e $f(1, 0, 1) = 1$, mentre agli estremi $x = 0$ e $x = 4$ abbiamo

$$f(0, 0, 2) = 2, \qquad f(4, 0, 10) = 10 .$$

La restrizione ad $h(B)$ risulta $g_B(y) = -2(y^2 + 2y - 5)$ per $y \in [0, 4]$ e si vede facilmente che tale funzione è strettamente decrescente, quindi ha massimo per $y = 0$ (che corrisponde al già visto punto $(0, 0, 2) \in \Sigma$) e minimo per $y = 4$, dove troviamo $f(0, 4, -22) = -38$. Infine la restrizione a $h(C)$ risulta essere $g_C(y) = -y^2 - 6y + 2$ per $y \in [0, 4]$ che è di nuovo decrescente. Quindi il massimo cercato si ha in corrispondenza di $(4, 0, 10)$ e vale 10 , mentre il minimo si ha in $(0, 4, -22)$ e vale -38 .

PROBLEMA 2

Considerate i campi vettoriali $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x \log(1+y^2) - \frac{x}{(1+x^2)^2} \ , \ \frac{x^2 y}{1+y^2}\right) , \qquad \boldsymbol{G}(x,y) = \boldsymbol{F}(x,y) + (y,0) \ .$$

a) **Dite se sono irrotazionali, se ammettono un potenziale e (in caso affermativo) calcolatelo.**

Considerate la curva $\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\phi(t) = \big(x(t), y(t)\big) \ , \qquad x(t) = 2\cos t + \cos(2t) \ , \ y(t) = 2 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t) \ .$$

b) **Calcolate i lavori**

$$\int_\phi \boldsymbol{F} \ , \qquad \int_\phi \boldsymbol{G} \ .$$

c) **Calcolate la lunghezza di ϕ.**

Calcoliamo:

$$\partial_y \boldsymbol{F}_1 = \frac{2xy}{1+y^2} = \partial_x \boldsymbol{F}_2 \ ,$$

quindi

$$\partial_y \boldsymbol{F}_1 - \partial_x \boldsymbol{F}_2 \equiv 0$$

ed $\boldsymbol{F}$ è irrotazionale. Dato che

$$\partial_y \boldsymbol{G}_1 - \partial_x \boldsymbol{G}_2 = \partial_y \boldsymbol{F}_1 + 1 - \partial_x \boldsymbol{F}_2 = 1 \ ,$$

$\boldsymbol{G}$ non è irrotazionale (e in particolare non può ammettere potenziale). Poiché $\boldsymbol{F}$ è definito in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, ammette un potenziale: integrando $\boldsymbol{F}_2$ rispetto ad y otteniamo

$$V_{\boldsymbol{F}}(x,y) = \frac{1}{2} x^2 \log(1+y^2) + g(x) \ .$$

Derivando tale espressione rispetto alla variabile x ed uguagliando a $\boldsymbol{F}_1$ otteniamo

$$g'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^2} \ ,$$

quindi

$$g(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \ .$$

Un potenziale di $\boldsymbol{F}$ è quindi

$$V_{\boldsymbol{F}}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[x^2 \log(1+y^2) + \frac{1}{1+x^2}\Big] \ .$$

Notiamo che $\boldsymbol{\phi}(0) = (3,0)$ e $\boldsymbol{\phi}(\pi) = (-1,0)$; il primo integrale quindi vale semplicemente

$$\int_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{F} = V_{\boldsymbol{F}}(-1,0) - V_{\boldsymbol{F}}(3,0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}\ .$$

Il secondo integrale vale

$$\int_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{G} = \int_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{F} + \int_{\boldsymbol{\phi}} (y,0) = \frac{1}{5} + \int_{\boldsymbol{\phi}} (y,0)\ .$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\phi}} (y,0) &= \int_0^{\pi} y(t)x'(t)\,dt = -2\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)\,dt \\ &= -2\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}^2 t + 3\operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}^2 2t)\,dt\ .\end{aligned}$$

Ricordando che $\int \operatorname{sen}^2 t\,dt = (t - \operatorname{sen} t\cos t)/2 + c$,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}\ , \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 2t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \tau\,d\tau = \frac{\pi}{2}\ ;$$

infine

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t\,dt = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt = 2\Big[\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\Big]_0^{\pi} = 0\ .$$

In conclusione

$$\int_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{G} = \frac{1}{5} - 2\cdot 3\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{5} - 3\pi\ .$$

Passiamo alla lunghezza: dato che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}'(t) &= \big(-2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}(2t), 2\cos t + 2\cos(2t)\big) \\ &= 2\big(-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t), \cos t + \cos(2t)\big)\ ,\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\phi}) &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t))^2 + (\cos t + \cos(2t))^2}\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\big(\operatorname{sen} t\operatorname{sen}(2t) + \cos t\cos(2t)\big)}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\,dt\end{aligned}$$

poiché $\cos(2t - t) = \operatorname{sen} t\operatorname{sen}(2t) + \cos t\cos(2t)$. A questo punto possiamo moltiplicare e dividere per $\sqrt{1-\cos t}$ ottenendo (la radice di $\operatorname{sen}^2 t$ è $\operatorname{sen} t$ dato che t è fra 0 e π)

$$\cdots = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}\operatorname{sen} t\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ 1-\cos t = z}}{=} 2\sqrt{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = 4\sqrt{2}\Big[\sqrt{z}\Big]_0^2 = 8$$

oppure effettuare subito il cambio di variabile $\cos t = s$ o quello $1+\cos t = s$ ottenendo lo stesso risultato.