Risoluzione del compito n. 5 (Settembre 2016/2)

PROBLEMA 1

Il dominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{\log(y - x^2 + 1)}{y - 2x}$ è un insieme (cerchiare la risposta corretta)

aperto e non connesso   aperto e limitato   chiuso e non connesso.

Serve che $y > x^2 - 1$ (la parte sopra una parabola, aperto) e che $y - 2x \neq 0$ (tutto tranne la retta $y = x$, un altro aperto), dunque il dominio è aperto. Contiene tutti i punti del semiasse (strettamente) positivo delle ordinate, dunque non è limitato. In effetti è sconnesso perché la retta taglia in due parti (aperte e non vuote) la zona sopra la parabola.

PROBLEMA 2

Sia $f(x,y) = 2xy^2$ e sia P il punto del grafico di f corrispondente a $(x,y) = (2,1)$. Allora un vettore normale al grafico di f nel punto P è .... e il piano tangente al grafico di f nel punto P ha equazione ....

Visto che $f(2,1) = 4$, abbiamo $\boldsymbol{P} = (2,1,4)$. Dato che $\nabla f(x,y) = (2y^2\ ,\ 4xy)$ e che $\nabla f(2,1) = (2,8)$ un vettore normale al grafico è $(2,8,-1)$ e l'equazione cartesiana del piano tangente è

$$(2,8,-1) \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}) = 0 \iff 2x + 8y - z = 8\ .$$

PROBLEMA 3

La lunghezza della curva $\phi : [0, 2\sqrt{3}] \to \mathbb{R}^2$ di equazione $\phi(t) = (t^3/3, t^2)$ è (cerchiare la risposta corretta)

negativa   **7/3**   **56/3**   **56/27 .**

Intanto calcoliamo

$$\phi'(t) = (t^2\ ,\ 2t) \quad \Rightarrow \quad \|\phi'(t)\| = \sqrt{t^4 + 4t^2} = |t|\sqrt{4 + t^2} = t\sqrt{4 + t^2}$$

dato che la curva è definita solo per $t \geq 0$, quindi

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\sqrt{3}} \|\phi'(t)\|\, dt = \int_0^{2\sqrt{3}} t\sqrt{4 + t^2}\, dt = \Big[\frac{1}{3}(4 + t^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{12}} = \frac{64 - 8}{3} = \frac{56}{3}\ .$$

PROBLEMA 4

Sia $f(x,y) = (y^2 - x - 3)\,\mathrm{e}^{x+y^2}$.

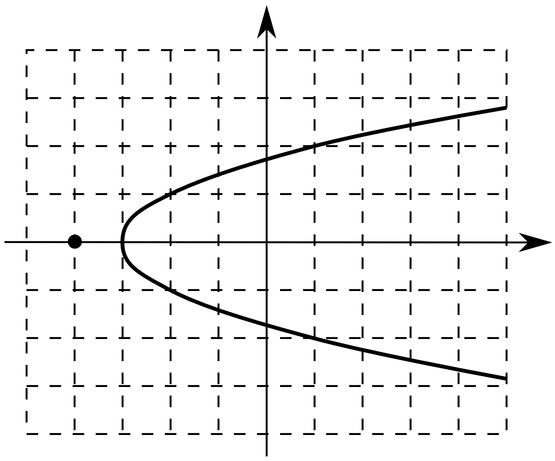
a) **Studiate il segno di f e disegnate il suo luogo di zeri individuando chiaramente le zone in cui $f > 0$ e quelle in cui $f < 0$.**

b) **Determinate gli eventuali punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ studiandone la natura.**

c) **Determinate estremo superiore ed estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ e dite se si tratta di massimo e minimo.**

d) **Determinate il massimo e il minimo di f sull'insieme $Q = \{(x,y) : y^2 \leq x \leq 4\}$.**

L'esponenziale è sempre positivo, quindi $f > 0$ per $x < y^2 - 3$, la parte di piano a sinistra di una parabola con la concavità verso destra, f si annulla sulla parabola e $f < 0$ a destra della parabola.



Calcoliamo $\partial_x f = (y^2 - x - 4)\,\mathrm{e}^{x+y^2}$ e $\partial_y f = (2y^3 - 2xy - 4y)\,\mathrm{e}^{x+y^2}$, quindi

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x = y^2 - 4 \\ y[2y^2 - 2(y^2 - 4) - 4] = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

e il solo punto stazionario è $(-4, 0)$. Per vedere che è una sella, si può seguire la procedura standard:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (y^2 - x - 5)\,\mathrm{e}^{x+y^2} & 2y(y^2 - x - 3)\,\mathrm{e}^{x+y^2} \\ 2y(y^2 - x - 3)\,\mathrm{e}^{x+y^2} & (4y^4 - 4xy^2 - 2y^2 - 2x - 4)\,\mathrm{e}^{x+y^2} \end{pmatrix}$$

quindi

$$Hf(-4,0) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-4} & 0 \\ 0 & 4\,\mathrm{e}^{-4} \end{pmatrix}$$

che è definita negativa. Un'altra strada sarebbe tentare di leggere f sulle rette $x = -4$ e $y = 0$. Sulla prima abbiamo

$$f(-4, y) = \frac{(1 + y^2)\,\mathrm{e}^{y^2}}{\mathrm{e}^4} ,$$

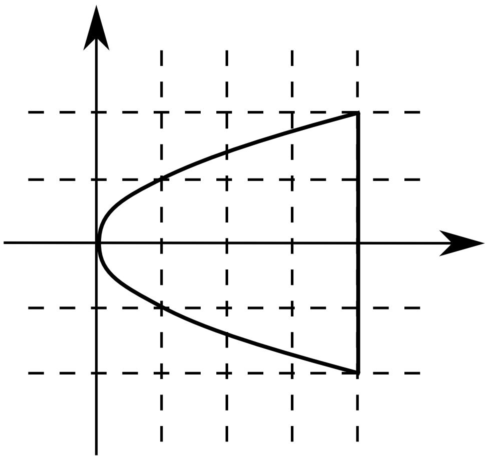
una funzione che ha minimo stretto in zero. Invece sulla seconda

$$f(x, 0) = -(x + 3)\,\mathrm{e}^x$$

che potremmo studiare oppure con un po' di fantasia riscrivere

$$\begin{aligned}\cdots = \mathrm{e}^{-4}[1 - (x + 4)]\,\mathrm{e}^{x+4} &= \mathrm{e}^{-4}[1 - (x + 4)][1 + (x + 4) + (x + 4)^2/2 + o(x + 4)^2] \\ &= -\,\mathrm{e}^{-4}\frac{(x + 4)^2}{2} + o(x + 4)^2\end{aligned}$$

e ha dunque massimo locale stretto per $x = -4$.
Dato che $f(0, y) = (y^2 - 3)\,\mathrm{e}^{y^2}$ tende a $+\infty$ per $y \to \pm\infty$, mentre $f(x, 0) = -(x + 3)\,\mathrm{e}^x$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$, gli estremi superiore e inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$, e ovviamente non sono massimo e minimo.



Dentro Q non vi sono punti stazionari perciò studiamo f sul bordo; questo è composto da un segmento verticale di estremi $(4, \pm 2)$ e da un arco di parabola. Sul segmento verticale studiamo

$$g : [-2, 2] \to \mathbb{R} , \qquad g(t) = f(4, t) = (t^2 - 7)\,\mathrm{e}^{t^2+4} \ :$$

abbiamo

$$g'(t) = 2t \cdot \left[(t^2 - 6)\,\mathrm{e}^{t^2+4}\right]$$

ma nell' intervallo considerato la quantità fra parentesi è negativa, dunque g ha massimo per $t = 0$ e minimi per $t = \pm 2$. In questi punti

$$g(0) = f(4, 0) = -7\,\mathrm{e}^4 , \qquad g(\pm 2) = f(4, \pm 2) = -3\,\mathrm{e}^8 .$$

Invece sull'arco della parabola di equazione $x = y^2$ studiamo

$$h : [-2, 2] \to \mathbb{R} , \qquad h(t) = f(t^2, t) = -3\,\mathrm{e}^{2t^2} ,$$

una funzione pari che non c'è bisogno di studiare e che ha minimi agli estremi $t = \pm 2$ (che abbiamo già esaminato studiando f sul segmento verticale) e massimo per $t = 0$. Abbiamo

$$h(0) = f(0, 0) = -3 .$$

Dato che $-3 > -7\,\mathrm{e}^4 > -3\,\mathrm{e}^8$, il massimo è $f(0, 0) = -3$ e il minimo è $f(4, 2) = f(4, -2) = -3\,\mathrm{e}^8$.

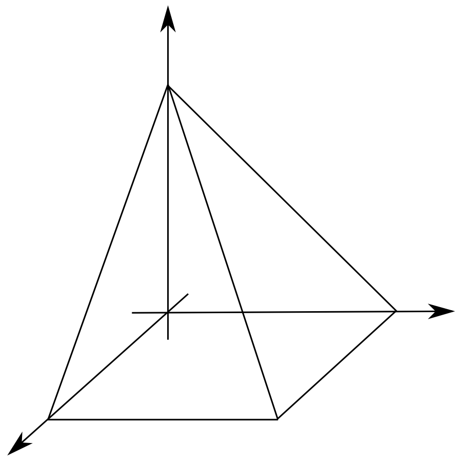
PROBLEMA 5

Considerate l' insieme $\boldsymbol{K = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1-z,\ 0 \le y \le 1-z,\ z \ge 0\}}$.

a) **Disegnate $\boldsymbol{K}$.**

b) **Calcolate $\boldsymbol{\int_K xyz\,dx\,dy\,dz}$.**

Guardiamo le condizioni un po' alla volta: le tre condizioni $x, y, z \ge 0$ dicono che stiamo nell'ottante positivo. La condizione $x \le 1-z$ dice che dobbiamo considerare, di questo ottante, solo la parte sotto al piano di equazione $x = 1-z$, un piano parallelo all'asse y e che passa per $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$. Se ci fermassimo qui avremmo un prisma (semi)infinito, di base il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ e che si estende nella direzione del semiasse positivo delle y . Aggiungendo la condizione $y \le 1-z$ ci resta, del prisma precedente, solo la parte al di sotto del piano di equazione $y = 1-z$; quest'ultimo interseca le facce del prisma in questo modo: la faccia sul piano yz nel segmento di estremi $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$; la faccia sul piano xy nel segmento di estremi $(0,1,0)$ e $(1,1,0)$ e infine la faccia inclinata viene intersecata nel segmento da $(0,0,1)$ a $(1,1,0)$. Il risultato è una piramide, che possiamo vedere con base il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ nel piano $z = 0$ e vertice il punto $(0,0,1)$.



Per ogni fissato $z \in [0,1]$, la sezione di K all'altezza z è il quadrato $[0,1-z] \times [0,1-z]$, pertanto

$$\begin{aligned}
\int_K xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z} xyz\,dx\right) dy\right] dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} yz\frac{(1-z)^2}{2}\,dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \frac{(1-z)^4}{4} z\,dz \ .
\end{aligned}$$

Vediamo di fare meno conti possibile:

$$\int_0^1 \frac{(1-z)^4}{4} z\, dz \underset{\substack{\uparrow \\ z=1-t}}{=} -\frac{1}{4}\int_1^0 t^4(1-t)\, dt = \frac{1}{4}\int_0^1 (t^4 - t^5)\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{120}\,.$$

PROBLEMA 6

Considerate l'equazione differenziale $y' + xy = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.
a) Determinate la soluzione generale dell'equazione.
b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$y' + xy = (x+1)\,\mathrm{e}^x\ , \qquad y(0) = 3\ .$$

Si tratta di una equazione lineare del primo ordine, non omogenea. Dato che x è la derivata di $x^2/2$, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $\mathrm{e}^{x^2/2}$ e otteniamo

$$\mathrm{e}^{x^2/2}(y' + xy) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x^2/2+x}\ .$$

Il primo membro è la derivata di $y\,\mathrm{e}^{x^2/2}$, mentre il secondo è (piuttosto evidentemente) la derivata di $\mathrm{e}^{x^2/2+x}$, quindi l'equazione equivale a

$$\left(y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x^2/2+x}\right)' \quad \Longleftrightarrow \quad y\,\mathrm{e}^{x^2/2} = \mathrm{e}^{x^2/2+x} + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \mathrm{e}^x + c\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

che è la soluzione generale cercata. Per risolvere il problema di Cauchy basta determinare c ponendo

$$3 = y(0) = \mathrm{e}^0 + c\,\mathrm{e}^0 = 1 + c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\ .$$