Risoluzione del compito n. 4 (Settembre 2016/1)

PROBLEMA 1

Una funzione $\boldsymbol{f}$ continua su $[-1,1]\times]-1,1[$ (cerchiare la risposta corretta)

ha di certo massimo   può avere massimo   non può avere massimo.

Dato che l' insieme non è compatto non possiamo applicare il Teorema di Weierstraß, ma f potrebbe avere massimo ugualmente, o non averlo. Ad esempio la funzione $f(x,y)=y$ non ha massimo (ha estremo superiore 1) e la funzione $f(x,y)=-y^2$ ha massimo (che vale zero). La risposta corretta è "può avere massimo".

PROBLEMA 2

Se $\boldsymbol{\phi(t)=(t^2,t-t^3)}$ è definita su $[0,+\infty[$, il punto della curva $\boldsymbol{\phi}$ corrispondente a $\boldsymbol{t=1}$ è $\boldsymbol{A}=$ . . . ., un vettore tangente alla curva in tal punto è . . . ., e l'equazione parametrica della retta tangente al sostegno di $\boldsymbol{\phi}$ in $\boldsymbol{A}$ è . . . .

Abbiamo $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\phi}(1)=(1,0)$, poi da $\boldsymbol{\phi}'(t)=(2t,1-3t^2)$ otteniamo che un vettore tangente è $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\phi}'(1)=(2,-2)$ e quindi l'equazione parametrica è $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{v}=(1,0)+t(2,-2)$.

PROBLEMA 3

La funzione $\boldsymbol{x^2}$ è una delle soluzioni dell'equazione differenziale (cerchiare la risposta corretta)

$$\boldsymbol{xy'+y=3x^2 \qquad y''-2y'+y=x^2-4x \qquad \frac{y'}{y}=\frac{y}{x}}\,.$$

Sostituendo x^2 al posto di y (e quindi $2x$ al posto di y' e 2 al posto di y'') nelle tre equazioni si ottengono le relazioni

$$2x^2+x^2=3x^2 \qquad 2-4x+x^2=x^2-4x \qquad \frac{2x}{x^2}=\frac{x^2}{x}$$

e la risposta corretta è la prima.

PROBLEMA 4

Considerate le funzioni $\boldsymbol{x^2+y^2}$ e $\boldsymbol{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Descrivete e disegnate i grafici delle due funzioni.

b) Descrivete e disegnate gli insiemi

$$\boldsymbol{A=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}}$$
$$\boldsymbol{B=\{(x,y,z)\in A: x\ge 0,\ y\ge 0\}\ .}$$

c) Calcolate $\boldsymbol{\int_B xyz\,dx\,dy\,dz}$.

I due grafici sono rispettivamente un paraboloide circolare e un cono circolare, entrambi con vertice nell'origine e la concavità rivolta verso l'alto. I grafici delle due funzioni r e r^2 si intersecano per $r=0$ e $r=1$, e si ha $r^2\le r$ per $0\le r\le 1$, pertanto

$$x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2} \iff (0\le)\sqrt{x^2+y^2}\le 1$$

e l'insieme A , che è la parte di spazio al di sopra del paraboloide e al di sotto del cono, sta tutto nella zona (che sarebbe poi un cilindro ...) in cui $\sqrt{x^2+y^2}\le 1$. Poi, B è la parte di A che sta sopra al primo quadrante del piano (x,y) . Integriamo in coordinate cilindriche di asse l'asse z , ricordando che lo jacobiano vale r : la funzione integranda diventa allora $(r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)zr$, la proiezione dell'insieme di integrazione sul piano (x,y) è il primo quarto della circonferenza unitaria perciò l'integrale si riscrive

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\Big[\int_0^1 r^3\Big(\int_{r^2}^r z\,dz\Big)dr\Big]d\theta\ .$$

Ora

$$\int_{r^2}^r z\,dz=\frac{r^2-r^4}{2}\ ,\qquad \int_0^1\frac{r^5-r^7}{2}\,dr=\Big[\frac{r^6}{12}-\frac{r^8}{16}\Big]_0^1=\frac{1}{12}-\frac{1}{16}=\frac{1}{48}$$

e finalmente l'integrale cercato vale

$$\frac{1}{48}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta=\frac{1}{48}\Big[\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{96}\ .$$

PROBLEMA 5

Considerate la funzione $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$.

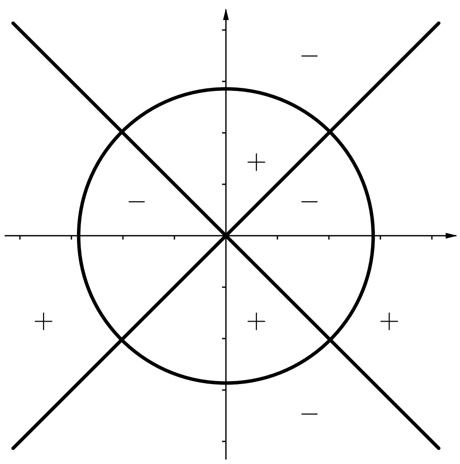
a) **Studiate il segno di f e disegnate il suo luogo di zeri.**

b) **Determinate gli eventuali punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ studiandone la natura.**

c) **Determinate estremo superiore ed estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ e dite se si tratta di massimo e minimo.**

d) **Determinate il massimo e il minimo di f sul quadrato $Q = [-2,2] \times [-2,2]$.**

La funzione $x^2 + y^2 - 2$ si annulla sulla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$, è positiva all'esterno e negativa all' interno. La funzione $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ si annulla sulle bisettrici dei quadranti (che dividono il piano in quattro zone), è positiva dove $|x| > |y|$ e cioè nelle zone destra e sinistra, ed è negativa nelle zone superiore e inferiore. Mettendo insieme i risultati si ottiene che f si annulla sulle bisettrici e sulla circonferenza, e che il segno di f è rappresentato in figura.



Si vede subito che sia l'origine che i quattro punti in cui $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$ saranno di sella, in quanto in ciascuno di questi punti possiamo trovare due direzioni lungo le quali f decresce e due lungo le quali f cresce. Inoltre ci aspettiamo che in ciascuno dei quattro spicchi in cui le bisettrici dividono il cerchio di raggio $\sqrt{2}$ ci sia un punto di massimo (spicchi superiore e inferiore) o di minimo (spicchi destro e sinistro), dato che ad esempio sul bordo dello spicchio superiore (che è un compatto) la funzione continua f si annulla mentre all' interno ha segno positivo, dunque il punto di massimo, che deve esistere per il Teorema di Weierstraß, deve trovarsi all' interno. Osserviamo poi che f è pari sia rispetto a x che rispetto a y , quindi basterebbe studiarla su un quadrante e poi replicare i risultati; anzi, visto che $f(x,y) = -f(y,x)$ basterebbe studiarla solo in metà di un quadrante. Abbiamo

$$\partial_x f = 4x(x^2 - 1) , \qquad \partial_y f = -4y(y^2 - 1)$$

perciò i punti stazionari sono nove (e sono quelli che avevamo già previsto), e precisamente

$$O = (0,0)\ , \quad S_1 = (1,1)\ , \quad S_2 = (-1,1)\ , \quad S_3 = (-1,-1)\ , \quad S_4 = (1,-1)$$

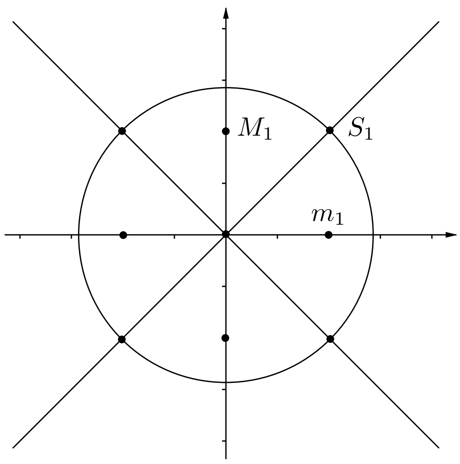
che saranno di sella,

$$M_1 = (0,1)\ , \quad M_2 = (0,-1)$$

di massimo locale e

$$m_1 = (1,0)\ , \quad m_2 = (-1,0)$$

di minimo locale.



Possiamo verificare rapidamente con l'aiuto della matrice hessiana

$$Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

che si tratta effettivamente di punti di sella, massimo, minimo. La funzione f vale zero in tutti i punti di sella, vale 1 nei due punti di massimo locale e -1 nei due di minimo locale. Dato che nei punti dell'asse delle ascisse abbiamo

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2 \to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty$$

mentre in quelli dell'asse delle ordinate

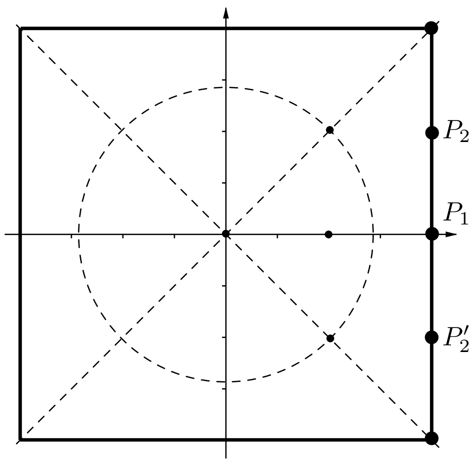
$$f(0,y) = 2y^2 - y^4 \to -\infty \quad \text{per } y \to +\infty$$

abbiamo $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$, che non possono essere massimo e minimo. Studiamo infine f sul compatto Q, dove il massimo e il minimo devono esistere. Abbiamo già individuato i punti stazionari di f, che sono tutti interni a Q, e non ci resta che studiare il bordo per poi mettere insieme i risultati. Per le simmetrie di f ci limitiamo al lato destro, poi ribalteremo il risultato sul lato sinistro e (cambiando segno e quindi scambiando eventualmente le parole “massimo” e “minimo”) sui lati superiore e inferiore, che sono i simmetrici dei lati destro e sinistro rispetto a una bisettrice dei quadranti. Poniamo

$$g(y) = f(2, y) = (4 - y^2)(2 + y^2) = 8 + 2y^2 - y^4 \ , \qquad -2 \leq y \leq 2$$

e vediamo che $g'(y) = 4y(1-y^2)$ si annulla per $y = 0$ e per $y = \pm 1$, che corrispondono ai punti

$$P_1 = (2, 0) \ , \quad P_2 = (2, 1) \ , \quad P_2' = (2, -1) \ .$$



Notiamo che

$$f(P_1) = 8 \ , \qquad f(P_2) = f(P_2') = 9 \ .$$

Inoltre dobbiamo tener conto dei valori di g sul bordo dell’intervallo di definizione $[-2, 2]$, cioè calcolare anche

$$f(2, -2) = f(2, 2) = 0 \ .$$

Allora sul lato destro del quadrato la funzione f ha minimo uguale a zero e massimo uguale a 9 (il valore 8 corrisponde a un minimo locale). Per mettere insieme i risultati sul bordo e all’interno, cominciamo a vedere che sul triangolo (pieno) di vertici $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(2, -2)$ la funzione f ha massimo 9, realizzato nei punti $(2, \pm 1)$ e minimo -1 realizzato in $(1, 0)$. Per le simmetrie di f abbiamo dunque

$$\max_Q f = 9 = f(2, \pm 1) = f(-2, \pm 1) \ , \qquad \min_Q f = -9 = f(\pm 1, 2) = f(\pm 1, -2) \ .$$

PROBLEMA 6

Considerate l'equazione differenziale $y' = y + y^2$.
a) Determinate due funzioni costanti che risolvono l'equazione.
b) Determinate tutte le altre soluzioni dell'equazione.
c) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = y + y^2 \,, \qquad y(0) = -1/2 \,.$$

Le costanti hanno derivata zero, quindi tutte le costanti che risolvono l'equazione verificano

$$0 \equiv y + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) \equiv 0 \,, \quad y(x) \equiv -1 \,.$$

Dato che il secondo membro dell'equazione differenziale è di classe C^1 vale il Teorema di unicità locale, quindi tutte le altre soluzioni non assumono mai il valore 0 o il valore -1 . In particolare possiamo dividere per $y + y^2$, che non si annulla mai, ottenendo l'equazione a variabili separate

$$\frac{1}{y+y^2} y' = 1 \,. \tag{1}$$

Cerchiamo una primitiva di $1/(y + y^2)$, che è una funzione razionale:

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y(y+1)}\, dy = \log|y| - \log|y+1| + c = \log\left|\frac{y}{y+1}\right| + c \,.$$

Allora da (1) ricaviamo

$$\log\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + c \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{y}{y+1}\right| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^x = k\,\mathrm{e}^x$$

dove $k = \mathrm{e}^c$ è (per ora) una costante positiva. D'altra parte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale non valgono mai 0 o -1 , dunque o sono interamente positive (e allora possiamo togliere il valore assoluto), o interamente inferiori a -1 (e di nuovo possiamo togliere il valore assoluto) o infine interamente comprese fra 0 e -1 : in questo caso la frazione all' interno del valore assoluto è sempre negativa, e di nuovo possiamo togliere il valore assoluto se cambiamo di segno al secondo membro. Ma allora la formula

$$\frac{y}{y+1} = k\,\mathrm{e}^x$$

con k qualsiasi (non nullo) ci darà tutte le soluzioni non costanti cercate. Determiniamole:

$$y = k\,\mathrm{e}^x y + k\,\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{k\,\mathrm{e}^x}{1 - k\,\mathrm{e}^x} \,.$$

Osserviamo che se $k < 0$ il denominatore non si annulla mai, pertanto la soluzione (massimale) è definita su tutto $\mathbb{R}$, e ricordiamo che questo corrisponde alle soluzioni comprese fra 0 e -1 . Invece se $k > 0$ il denominatore si annulla per $x = -\log k$ e abbiamo solo soluzioni definite per $x < -\log k$ e soluzioni definite per $x > -\log k$. Non è difficile verificare che le prime sono quelle positive, le seconde quelle minori di

-1 . Infine, per trovare la soluzione del problema di Cauchy dobbiamo determinare k , e conviene farlo da

$$\frac{y(0)}{y(0)+1} = k\,\mathrm{e}^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-1/2}{1-1/2} = k\ ,$$

quindi $k=-1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{1+\,\mathrm{e}^x}\ .$$